Faktische Wahrscheinlichkeit und Brownsche Bewegung

Leopoldo Bertossi

Hier werden wir uns darauf beschraenken, die wichtigsten intuitiven Ideen und grundlegenden Definition zu geben, auf die unsere Arbeit basiert ist. Auf diese Weise presentiere ich hier nur den Kontext, der notwendig fuer das Verstaendnis unseren Beitrag ist.

Wie es im Abstract steht, bezieht sich faktische Wahrscheinlichkeit auf eine von Chuaqui gegebene Definition der Wahrscheinlichkeit. Diese Definition kann man als faktisch kennzeichnen in dem Sinne, dass das Wahrscheinlichkeitsmass aus einer objektiven Modellierung der physikalischen Zufallssituation entsteht.

So wie bei der Definition der Wahrheit von Tarski, betrachten wir relationalle Strukturen, die Modellen der moeglichen Welte sind. Hier meinen wir, physikalisch moeglichen Welte. Betrachten wir das folgende

Beispiel: Werfen eines Wuerfels. Hier haben wir ein einfaches Experiment. Die einfachen moeglichen Ergebnisse stellen wir auf folgende Weise dar: Falls $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, dann sind $\langle S, \{1\}\rangle, \ldots, \langle S, \{6\}\rangle$ die Ergebnisse (gleiche Typ der Similaritaet, S is der feste Traeger, und $\{1\}$, etc. sind veraenderlich).

Diese Ergebnisse fassen wir zu einer einfachen Wahrsheinlichkeitsstruktur (W-Struktur) zusammen: $\underline{K} = \{\langle S, \{1\}\rangle, \ldots, \langle S, \{6\}\rangle\}$. □

Bei anderen Situationen koennten mehr Relationen vorkommen. Im allgemeinen, gegeben eine einfache Warhscheinlichkeitsstruktur, betrachten wir eine Gruppe $G_{\underline{K}}$ von Transformationen des Traegers, die die Gesetze des Zufallsphaenomen wiederspiegeln. Fuer $A, B \subseteq \underline{K}$, schreiben wir $A \sim B$ (A und B sind symmetrisch), falls es ein $g \in G_{\underline{K}}$ gibt, so dass $g(A) = B$.

In konkreten Faellen kann man zeigen, dass es ein einziges Mass μ gibt, so dass $A \sim B \Rightarrow \mu(A) = \mu(B)$. Wir sagen, μ sei das Wahrsheinlichkeitsmass, das von $\underline{K}$ bestimmt wird.

Zusammenfassend koennte ich sagen, dass diese Konstruktion als eine mathematische Praezissierung des Prinzips von Laplace betrachtet werden koennte.

Ich will in die Details nicht eingehen, nur das folgende sollte an diese Stelle erwaehnt werden: Sind $A, B \subseteq \underline{K}, A \sim B, B = B_1 \dot{\cup} B_2, B_1, B_2$ nicht leer, dann existieren $A_1, A_2 \subseteq \underline{K}$, nicht leer, so dass $A = A_1 \dot{\cup} A_2$ (dies folgt aus der Definition von $\sim$).

Obwohl jedes zusammengesetztes Experiment als ein einfaches Experiment betrachtet werden kann, ist es nicht moeglich, alle zusammengesetzte Experimente mit den einfachen Wahrscheinlichkeitsstrukturen darzustellen: Sehen wir das folg

Beispiel:

1. Waehle eine Urne.

2. Waehle einen Kugel aus der Urne.

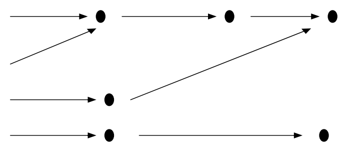
Ereignisse: A: »schwarzer Kugel” B: »weisser Kugel”

Es sollte sein $\mu(A) = \mu(B)$, d.h. $A \sim B$. Das ist aber nicht moeglich, da $B = B_1 \dot{\cup} B_2$ und dies fuer A nicht gilt. □

Also, um zusammengesetzte Zufallsphaenomene bzw. Experimente beruecksichtigen zu koennen, muessen wir unsere Definition erweitern. Zu diesem Zweck definieren wir die sogennanten »zusammengesetzten Wahrscheinlichkeitsstrukturen” (einfach zg. W-strukturen).

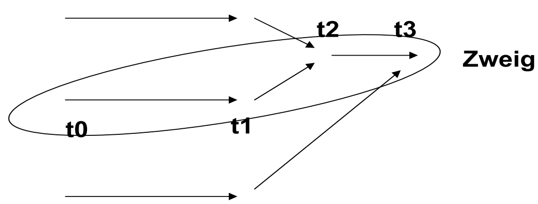
Fuer ihre Definition benutzen wir die einfachen W-Strukturen und was wir nennen eine *kausale Struktur*, die die abhaengigkeitsrelationen des Phaenomens darstellen wollen. Im allgemeinen sind die zg. W-Strukturen von folgenden Elementen bestimmt:

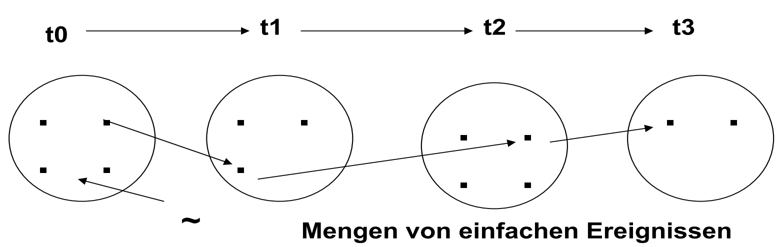
1. Die kausale Struktur $\mathcal{F}$, deren grundlegende Elemente »kausale Baeume” $\langle T, \leq_T \rangle$ sind, wobei T eine Menge ist, $\leq_T$ eine partielle Ordnung, wo die nachfolger von $t \in T$ hoechstens abzaehlbar und wohlgeordnet sind.



Im allgmeinen sind die Elemente von T Zeitpunkten und $s \leq_T t$ kann so interpretiert werden, dass was um Zeit s geschiet beinfluesst was in t geschiet.

2. Die zg. Ergebnisse: f is en zg. Ergebnis, falls f eine Abbildung ist, wobei $Dom(f)$ ist ein Baum in $\mathcal{F}$; und fuer $t \in Dom(f)$, $f(t)$ gehoert zu einer einfache W-Struktur (wo es schon ein Mass und eine Relation $\sim$ gibt).





3. Die Relation von Symmetrie, $\approx$, die eine Relation unter Menen von z.g. Ergebnissen definiert, auf der Basis der Symmetrierelationen, die in den einfachen W-Strukturen existieren.

1. 2. und 3. bestimmen ein Mass P.

Nun, der Abstract ist ziemlich lang und detalliert. Da steht eine Darstellung der Brownschen Bewegung als z.g. Phaenomen im Kontext unserer Definition der Wahrscheinlichkeit. Darauf brauche ich nicht einzugehen.