Cinq siècles de mathématiques en France

Marcel Berger

Marcel Berger est directeur de recherche émérite au CNRS et membre correspondant de l'Académie des sciences. Il a mené une carrière universitaire en France, avec des séjours aux États-Unis et au Japon, et de directeur de recherche au CNRS. De 1972 à 1981, il a présidé la Société mathématique de France et, de 1985 à 1994, il a dirigé l'Institut des hautes études scientifiques de Bures-sur-Yvette.

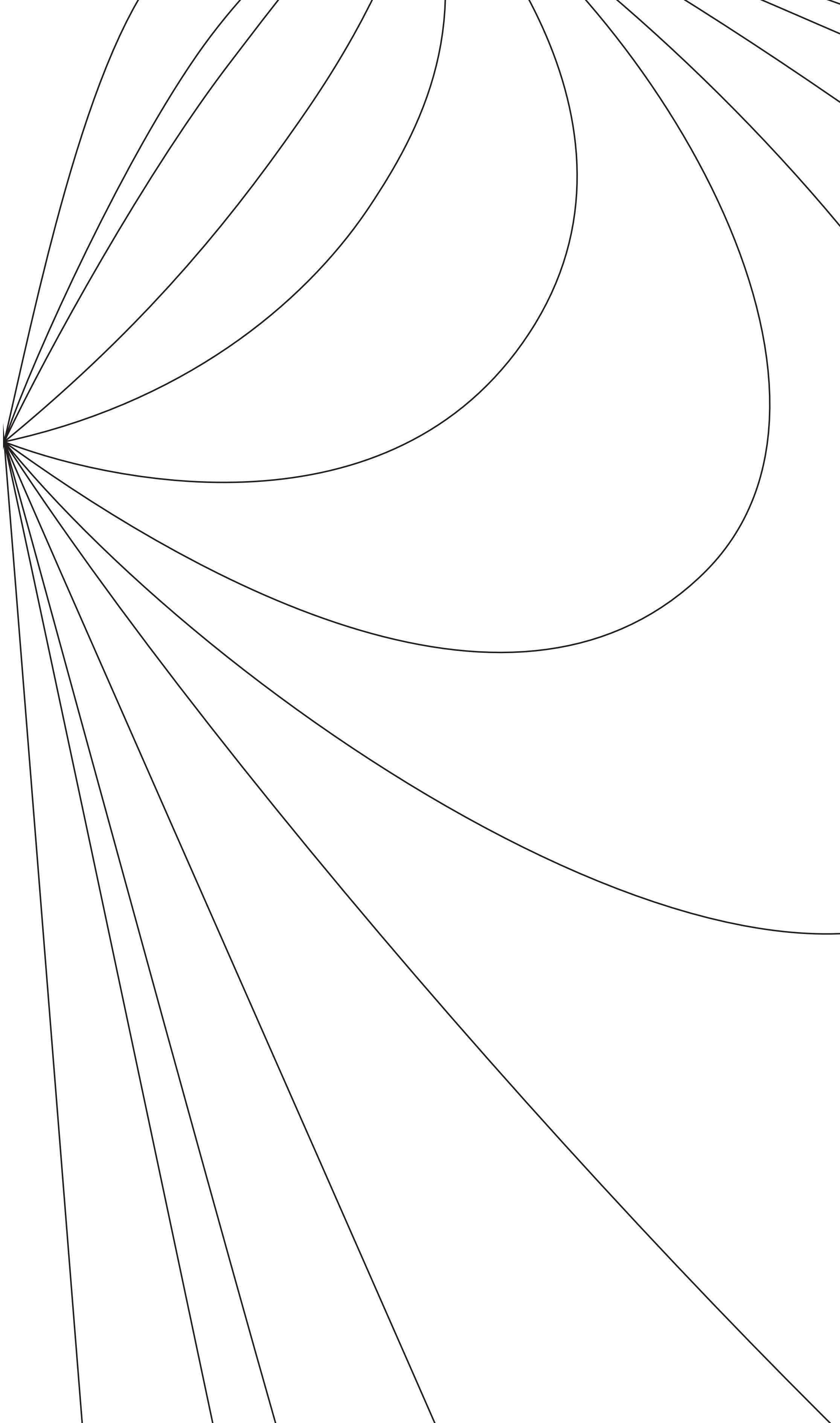
L'œuvre scientifique de Marcel Berger a été consacrée à la Géométrie différentielle. Il a notamment publié : avec P.Gauduchon et E.Mazet, *Le spectre d'une variété riemannienne*, Springer Lecture Notes, 194, 1971 ; *Géométrie* (5 vol.), Nathan, 1977–1978 (traduit en anglais, russe, chinois), 3e réed. (2 vol.), Nathan, 2003 ; avec B.Gostiaux, *Géométrie différentielle*, PUF, 1987 (traduit en anglais, Springer), *A Panoramic View of Riemannian Geometry*, Springer, 2003. Deux ouvrages sont à paraître : *Convexité I & II*, Ellipses ; *Géométrie vivante : L'échelle de Jacob de la géométrie*, Cassini.

Cet ouvrage a bénéficié du concours de **Claude Reyraud**, rédacteur en chef-adjoint des Défis du CEA.

Ministère des Affaires étrangères
Direction générale de la Coopération internationale et du Développement
Direction de la Coopération culturelle et du Français
Division de l'Écrit et des Médiathèques

isbn 2-914935-38-2

adpf association pour la diffusion de la pensée française ●
6, rue Ferrus 75014 Paris



II *Les mathématiques françaises de Viète à Bourbaki*

III *Les mathématiques françaises contemporaines*

Avant-propos

Incontestablement, la France est un grand pays de mathématiques. Héritières d'une longue tradition d'excellence scientifique née sous l'Ancien Régime, dotées d'institutions remontant à la Révolution et perpétuant le souvenir de grands noms tels que Fermat, Lagrange, Poincaré ou Bourbaki, très tôt tournées vers le progrès technique et les applications les plus diverses, les mathématiques françaises ont contribué aux bouleversements technologiques de ces dernières années.

Désireux de rappeler la position de la France dans le domaine scientifique, le ministère des Affaires étrangères et son opérateur pour le livre et l'écrit, l'Association pour la diffusion de la pensée française, ne pouvaient manquer de saluer l'exigence constante qui a marqué le développement de la pensée mathématique dans notre pays.

Que monsieur Marcel Berger soit ici remercié pour le talent avec lequel il nous fait revivre cette histoire tout entière tournée vers l'avenir.

Yves Mabin
Chef de la division de l'Écrit et des Médiathèques

François Neuville
Directeur de l'Association pour la diffusion de la pensée française

Introduction générale

Dans cet ouvrage, il ne peut être question de présenter les mathématiques françaises jusque dans le plus infime détail. Que ce soit à propos de l'histoire ou de la situation des mathématiques aujourd'hui, nous devrons nous borner aux grands noms et aux grandes contributions de tous ceux qui ont, au moins partiellement, mené leurs recherches en France. Nous présentons nos excuses de n'avoir pu, par manque de place, nommer tous ceux qui ont contribué à l'édifice complexe des mathématiques. Ces excuses s'adressent, en particulier, aux mathématiciens à l'œuvre et dont nous ne pouvions exposer les travaux, encore difficiles à jauger les uns par rapport aux autres. L'exposé de certaines recherches mathématiques serait, en effet, incomplet sans l'évaluation qui résulte de l'examen de ces recherches par l'ensemble des mathématiciens, qui s'en empareront pour les utiliser, voire les compléter. La richesse et la qualité de la production actuelle ne favorisent pas ce processus. Rappelons le théorème de Dieudonné, que plus personne ne conteste : « Il s'est fait autant de mathématiques depuis l'origine des temps jusqu'à 1950 que de 1950 à nos jours. »

Après une première partie consacrée à l'utilité même des mathématiques (chapitre I), le présent ouvrage retrace (chapitre II) l'histoire de nos mathématiques, de Viète à Bourbaki et aux années 1950. L'on y constatera schématiquement ceci : les savants français de notre discipline dominent, presque complètement, de 1550 à 1650, avec les cinq noms phares de Viète, Fermat, Descartes, Desargues et Pascal. On notera que dans l'ouvrage de Carl Boyer, qui est probablement le meilleur livre couvrant complètement et en un volume raisonnable l'histoire des mathématiques de l'origine à Bourbaki, l'un de ses 17 chapitres est justement intitulé : « Le temps de Fermat et de Descartes ».

Cependant, après les travaux du célèbre philosophe mathématicien, Pascal rompt la chaîne en s'arrêtant au seuil du calcul infinitésimal. Il laisse ainsi échapper le flambeau de cette création qui se conclura en Allemagne avec Leibniz et en Angleterre avec Newton.

Pendant ces années de « vide » de la production française, nous ne pourrons évidemment pas, bien que nous n'écrivions pas une histoire de toutes les mathématiques, omettre de décrire très brièvement les contributions essentielles des autres pays.

Le flambeau revient en France de 1750 à 1850, mais de façon moins absolue tant la croissance des mathématiques est rapide. C'est l'époque de la fin de la monarchie et des « mathématiciens de la Révolution française », pour citer encore une fois l'ouvrage de Boyer. Les noms clefs, ce sont tout d'abord les « six grands » :

Laplace, Lagrange et Legendre (les « trois L »), Condorcet, d'Alembert et Monge. Ces six mathématiciens, qui dominent leur époque de manière presque absolue, à l'exception d'Euler en Russie et de Gauss en Allemagne, partagent le haut de la scène française avec d'autres esprits tout aussi célèbres : Fourier, Galois, Cauchy, Poncelet et Chasles.

Nous y ajouterons les noms, moins importants mais qu'il serait difficile de passer sous silence, de Liouville, Sophie Germain et Lazare Carnot.

Puis, vers 1840, alors que la production de l'école française semble se tarir en nombre et en qualité, l'hégémonie repasse à la fois en Angleterre et en Allemagne. Ces deux pays resteront à la pointe jusque dans les années 1930 et la naissance du mystérieux « Bourbaki », qui stimulera très fortement les mathématiciens français.

Dans l'intervalle, la France ne s'est cependant pas transformée en « désert mathématique » et, dès 1880, elle abrite de très grands esprits, dont certains marqueront définitivement l'histoire des sciences : Charles Hermite, Camille Jordan, Jean-Gaston Darboux, Henri Poincaré, Émile Picard, Élie Cartan, Jacques Hadamard, Émile Borel, Henri Lebesgue, Paul Lévy. Malgré la présence de cette élite, il est toutefois difficile de parler d'une véritable « école française » tant, outre-Rhin, l'école allemande brille en nombre et en qualité. Cette école germanique dominera les mathématiques jusqu'à l'exode des Juifs, à partir de 1935, puis la guerre. Bref, de 1840 à 1950, la France subit une nouvelle et relative « éclipse mathématique ».

Nous présenterons dans un second temps (chapitre III) les mathématiques françaises contemporaines, particulièrement impressionnantes. En effet, depuis 1950, on assiste à une véritable explosion. Cette moisson miraculeuse a été soigneusement préparée, avant guerre notamment, par les fondateurs de Bourbaki ; nous détaillerons, avec les risques inhérents à toute explication de ce genre, les raisons du déclin et celles du rebond. Dans la présentation des mathématiques françaises des années 1950 à nos jours, nous serons obligés d'être schématiques, à la fois par manque de place et parce qu'il faut du recul pour juger, *a posteriori*, de la grandeur des contributions. Peut-être est-ce encore plus difficile en mathématique, qui est la seule science procédant, à la manière des éléments d'Euclide à leur époque, par des synthèses successives de ses acquis, synthèses qui arrivent à concentrer en quelques lignes, en quelques axiomes et concepts bien choisis, des années de productions apparemment dispersées.

La dernière partie (chapitre IV) comportera enfin tous les outils et indications nécessaires : une liste détaillée des lieux d'enseignement et de recherche, la liste des instituts de recherche, en particulier des pôles d'excellence en recherche pure, la liste des organisations professionnelles auxquelles le lecteur pourra s'adresser et une bibliographie (précédée de commentaires), tant pour les travaux passés que présents : nous nous sommes en effet servis d'ouvrages de natures variées. L'histoire des sciences est un domaine délicat où il peut être tentant de travailler « en seconde main » sans vouloir l'admettre !

Si l'on voulait une seule preuve de la grandeur de l'école mathématique française, on la trouverait dans le fait que le français est la seule langue, avec l'anglais, langue universelle des disciplines scientifiques, qui soit encore utilisée aujourd'hui dans de nombreux écrits et conférences (Voir à ce sujet Lafforgue, 2005).

Nous ne risquerons pas une analyse de la réussite des mathématiques en France ; hasardons-nous seulement à la conjonction de deux points. Le premier appartient à la culture française : nous sommes des frondeurs. Le second à la culture mathématique : Georg Kantor (1845–1918) a ainsi écrit : « Das Wesen der Mathematik liegt gerade in ihrer Freiheit » (« L'essence des mathématiques est précisément dans sa liberté »).

Avec 60 millions d'habitants seulement, la France est riche de nombreux centres de recherche de pointe, comme l'École normale supérieure, l'École polytechnique, le Collège de France, l'Institut Henri-Poincaré, l'Institut des hautes études scientifiques ou l'Institut national de recherche en informatique et en automatique, pour ne citer ici que les plus connus, présentés plus loin dans cet ouvrage.

Paris est, sans comparaison avec aucune autre ville de la planète, la première place mathématique du monde. Dans toutes les parties de l'algèbre, de la géométrie ou de l'analyse, on peut trouver dans la capitale française et sa proche banlieue des professeurs et des chercheurs de plan international, des séminaires en tout point dignes du pays qui les accueille.

Remerciements

Nous devons beaucoup à Jean Dhombres, qui a soigneusement relu notre texte et y a fait de nombreuses corrections. Merci également à Michel Waldschmidt (ex-président de la Société mathématique de France), ainsi qu'à M. Nabonnand, spécialiste de l'histoire, si compliquée, de la géométrie projective.

Les deux livrets *Mathématiques dans la vie quotidienne* (Chaleyat-Maurel, Brette *et alii*, 2001) et *L'Explosion des mathématiques* (Martin-Deschamps, Le Tallec, Waldschmidt *et alii,* 2002) nous ont été particulièrement utiles pour la partie intitulée « À quoi servent les mathématiques ? ». Nous remercions les auteurs, ainsi que la Société mathématique de France et la Société de mathématiques appliquées et industrielles, de nous avoir permis d'en utiliser textes et iconographie.

Merci à Bruno Belhoste de m'avoir communiqué son texte essentiel sur Poncelet (Belhoste, 1998).

Merci aussi au CNRS et à Alain Gris de nous avoir permis d'utiliser le rapport de conjoncture du CNRS de 1996, commission 1 (celle des mathématiques).

Nous sommes très reconnaissants à David Mumford pour ses schémas reproduits dans la section consacrée à Grothendieck et à Bob Devaney pour ses ensembles de Julia.

Enfin, que soient vivement remerciés le service Patrimoine de la bibliothèque de l'École polytechnique et la bibliothèque de l'École normale supérieure de nous avoir permis de reproduire un grand nombre de couvertures d'ouvrages.

I *À quoi servent les mathématiques ?*

a Mathématiques pures ou appliquées ?

Dans le débat « mathématiques pures » *versus* « mathématiques appliquées », nous pensons (avis qui n'est pas partagé unanimement) qu'il n'existe pas de véritables « mathématiques appliquées », mais seulement des applications des mathématiques. Mais lorsque nous parlerons, par exemple, des travaux de Leray, de Laplace, dont la majeure partie avait été réalisée en vue d'applications, ou de Fourier, nous ne considérerons que les créations mathématiques pures et non les résultats que ces auteurs en déduisirent pour construire des applications. Cette précision est essentielle à ce qui va suivre.

Le texte suivant illustre tout à fait notre pensée et sera conforté par différents exemples de grands mathématiciens que nous rencontrerons : « La différence entre un mathématicien appliqué et un mathématicien pur n'est pas dans la catégorie de mathématiques qu'il connaît, ce n'est pas non plus si oui ou non il peut créer des idées nouvelles qui feront époque, ou encore si, comme pour la plupart d'entre nous, sa capacité réside principalement dans l'interprétation d'éléments déjà connus. La différence réside au contraire dans la nature de ses intérêts ; dans ses attitudes, et non pas dans ses aptitudes. C'est presque une différence sociale » (Booss-Bavnbek et Hoyrup, 2003, p. 31). Nous conseillons du reste ce livre remarquable à tous ceux que les relations entre les mathématiques et les guerres intéressent.

Une césure catégorique pourrait laisser croire que les mathématiques « contemplatives » proprement dites n'ont pas d'applications ou alors seulement par accident. C'est faux, on le sait depuis longtemps. Cependant, l'erreur continue de se propager non seulement parmi le grand public, mais tout autant parmi les hommes politiques. Pire encore, un nombre non négligeable d'anciens élèves de l'X (École polytechnique), qui croient que les mathématiques s'arrêtent au contenu des cours de cette école, ignorent les « retombées » des mathématiques fondamentales. Un exemple historique typique est celui des nombres complexes : créés pour des besoins métaphysiques, afin que toute équation polynômiale ait toujours des racines, ils sont aujourd'hui utilisés et bien connus de tous les électriciens. Ceux-ci, même au niveau le plus modeste, ne peuvent ignorer la notion d'impédance qui repose sur une représentation dans le plan complexe des phénomènes électriques. Nous décrirons également un exemple d'application ancienne, mais significative, avec le déchiffrage d'un code secret par Viète.

Le délai entre la création de purs objets et leurs applications est longtemps resté assez important. Il se trouve qu'aujourd'hui, un très grand nombre de résultats mathématiques sont utilisés très rapidement. Le fait que le nombre de contrats passés entre l'industrie et les chercheurs mathématiciens professionnels, voire même le nombre des postes à temps plein proposés dans ces industries, qui ne sont pas seulement militaires, a crû de façon exponentielle, confirme cette tendance. En quelques années, les États-Unis ont décidé de multiplier par cinq le budget de la National Science Foundation consacré aux mathématiques. Il serait sans doute souhaitable que la France augmente le modeste soutien qu'elle accorde à la recherche mathématique. Maintenir un budget global trop juste est absurde, les mathématiques ne coûtant du reste pratiquement rien, comparées aux disciplines qui ont besoin d'un support matériel lourd, tels les grands équipements de physique, la recherche spatiale ou les laboratoires de biotechnologies.

Cependant, malgré un niveau de financement assez faible, la France reste le deuxième pays au monde pour cette discipline.

b Les mathématiques sont-elles utiles ? *Utilité* versus *contemplation*

À l'origine, on ne se posait sans doute pas la question de l'utilité des mathématiques. D'ailleurs, le mot « mathématiques » n'existait pas encore au temps de Babylone, des pyramides et des scribes qui nous ont laissé les premières traces écrites de l'Histoire. Pourtant, selon Hérodote, les Égyptiens, qui avaient besoin de redistribuer les terres après chaque crue du Nil, ont inventé les premiers calculs de surface. Si les quadrilatères et les triangles ne leur posaient aucun problème, les surfaces limitées par des courbes, et en particulier les cercles, étaient obtenues en les assimilant à une combinaison des figures précédentes. Les scribes, qui utilisaient un système de calcul relativement simple et efficace pour obtenir des valeurs approchées de fractions, remplaçaient les cercles par des octogones. Ce savoir pratique s'est perpétué sans susciter aucun questionnement théorique avant de parvenir aux oreilles d'Hérodote et des géomètres grecs qui ont découvert la singularité du nombre $\sqrt{2}$ en recherchant les épures des formes naturelles. De ces travaux, qui ont abouti aux calculs actuels, les érudits de la Renaissance ont conçu des engrenages capables de démultiplier les mouvements pour tirer des charges très lourdes, fabriquer des machines volantes ou des pompes à eau de fort calibre. Les développements mathématiques ultérieurs des calculs de surfaces limitées par des courbes sont retournés vers l'abstraction pour engendrer le calcul différentiel et les intégrales…

De tout temps, les mathématiques ont donc évolué sous la double poussée du désir de comprendre et du besoin de répondre aux questions des autres sciences et techniques. Depuis Hérodote, ce mouvement binaire de progression s'est poursuivi en s'accélérant. Il marque profondément les pratiques et les usages actuels des mathématiques.

Le désir de comprendre est aussi fondamental pour les mathématiciens que pour tous les autres chercheurs, mais ceux qui travaillent sur les fondements des mathématiques sont sans doute plus pointilleux sur leur manière d'établir la vérité. Andrew Wiles, qui a récemment démontré le théorème de Fermat, a élaboré une démonstration entièrement manuelle, sans aucune aide informatique. Sa démonstration s'appuie sur les travaux qui se sont succédé en grand nombre depuis le XVIIIe siècle, entre autres, ceux d'André Weil. De cas particuliers en démonstrations partielles, les uns et les autres ont essayé d'établir ce qui n'était qu'une conjecture sur les nombres entiers et leurs puissances. Ce défi qui, *a priori*, ne débouchait sur aucune application et n'était qu'une question de nature fondamentale sur les nombres, a joué le rôle d'une puissante locomotive pour de multiples développements mathématiques, dont beaucoup

restaient jusque-là dans l'abstraction. Aujourd'hui, la théorie, les résultats obtenus sur les nombres premiers ont rejoint notre quotidien en confirmant l'existence de clés de cryptage inattaquables. Ce sont elles qui assurent la confidentialité des informations qui parcourent les réseaux du monde entier. Elles contribuent donc au développement de ce nouveau média qu'est l'Internet.

Cet exemple montre à quel point la durée du développement d'une idée mathématique peut être extrême. Alors que l'immense majorité des travaux des physiciens et des biologistes devient obsolète au bout de quelques années seulement, et qu'il faut plus ou moins régulièrement ajuster, perfectionner leurs résultats, les mathématiciens n'hésitent pas à faire leur miel de conjectures et de théorèmes, de concepts parfois vieux de plus d'un siècle, quoique parfois aussi tout récents. Les démonstrations mathématiques sont d'indestructibles constructions de l'esprit. C'est donc sur une durée parfois très longue qu'il faut juger de l'influence de travaux mathématiques ; mais aujourd'hui, avec l'accroissement exponentiel, tant des résultats obtenus que de leur communication, une durée très courte, voire presque instantanée, peut souvent suffire. À tel point que l'on peut légitimement penser que les développements qui intéressent notre vie quotidienne sont tous issus d'une pensée abstraite, voire d'une ou de plusieurs théories mathématiques. Ainsi, répondre à la question de savoir à quoi servent les mathématiques est-il à la fois très simple et très difficile : très simple, puisque presque tout ce qui touche aujourd'hui notre quotidien est l'objet d'une théorie mathématique ; très compliqué, puisque les développements mathématiques qui mènent à une application particulière sont à la fois multiples et parfois sans lien direct avec le résultat, et surtout basés, sur des concepts, pire, des échelles de concepts de plus en plus abstraits. Il est néanmoins étonnant de constater à quel point le monde d'aujourd'hui est fait d'éléments, de concepts qui ont pris naissance dans le cerveau d'un mathématicien il y a plus ou moins longtemps avant d'appartenir aux objets du quotidien parfois les plus familiers. La lecture de Booss-Bavnbek et Hoyrup (2003), déjà cité, est particulièrement instructive.

Nous développerons maintenant quelques exemples brefs, montrant que les mathématiques, même de pointe, font partie de notre vie de tous les jours.

c Exemples

Avis de tempête mathématique

Il y a longtemps que la prévision météorologique n'est plus une affaire de divination ni même de baromètre (ni même non plus de baromètre enregistreur). Le climat d'aujourd'hui se prête à une modélisation qui fait dire aux experts que c'est bien l'activité humaine qui réchauffe la planète, avec les conséquences catastrophiques que l'on imagine pour notre futur. Au quotidien, des stations de mesure et une flottille de satellites doublés d'énormes ordinateurs surveillent le temps : un découpage de l'atmosphère en boîtes de calcul de quelques kilomètres de côté leur permet de construire un modèle global à diverses échelles et de donner un pronostic à court terme. Toutefois, le point de départ des prévisions reste le plus souvent incertain car les mesures sont disparates et mal distribuées autour du globe. Des méthodes mathématiques comme « l'assimilation variationnelle », issues entre autres de l'école française des années 1980, viennent combler les vides. D'autre part, ce découpage de l'atmosphère en boîtes de calcul régulièrement espacées en accord avec les zones surveillées comporte d'immenses difficultés. Ainsi, les satellites ne donnent qu'une valeur moyenne correspondant à une intégration sur toute la hauteur de l'atmosphère ; les océans ne sont pas accessibles partout et des régions entières restent encore dans l'ombre. Reste enfin le problème mathématique très subtil qui consiste à bien répartir ces points de contrôle sur une sphère.

Et pour la semaine prochaine ? Impossible de prévoir : l'atmosphère est capricieuse et, pour tout dire, chaotique. Une très faible erreur sur son état de départ fait très vite boule de neige, tout comme un mouvement d'air aussi ténu qu'un battement d'aile de papillon peut déclencher un cyclone à l'autre bout du monde. Dès lors, comment font les experts pour prévoir les évolutions du climat ? La théorie des systèmes dynamiques, élaborée au début du siècle dernier par Henri Poincaré, a permis de dégager certains « attracteurs étranges » qui donnent la tendance sous la forme de prévisions empreintes de probabilités. Cette conception probabiliste du climat s'appuie sur des outils très récents comme la « théorie des équations aux dérivées partielles stochastiques ». Sans ces mathématiques de pointe, les plus gros ordinateurs du monde resteraient impuissants. Alors, cyclones, canicules, inondations ou glaciations catastrophiques seront-ils le lot des générations futures ? Les mathématiques auront encore un grand rôle à jouer dans toutes les actions de prévention que pourra entreprendre l'ensemble des nations du monde.

Des outils pour modéliser la biologie

Comment guérir les myopathies ou les cancers du sein ? En trouvant le gène responsable, disent les biologistes. Pas facile, pourtant… Sur six milliards de paires de bases que comprend le génome humain, seulement trois pour cent vont composer les « mots » qui définissent nos protéines, ces constituants intimes des cellules de notre corps. Retrouver la dizaine de millionièmes de millimètre qu'occupe un gène le long des deux mètres du fil d'ADN contenu dans chaque cellule humaine est une entreprise extrêmement difficile. Le décryptage du génome humain n'a fait que souligner le dénuement des biologistes : pour définir les 30 à 80 000 gènes humains, les mots n'ont que trois lettres prises dans un alphabet de quatre et sont entrecoupés de longues séquences de remplissage qui interrompent les phrases utiles. Tout en masquant les gènes qui s'y cachent, ces séquences submergent de données inutiles les ordinateurs du décryptage.

L'un des outils mathématiques utilisés par les biologistes provient des méthodes de reconnaissance automatique de la parole. Les deux problèmes sont directement apparentés : dans les deux cas, le message porté, soit par des ondes acoustiques, soit par les séquences des éléments qui constituent l'ADN, est un enchaînement dans lequel chaque segment dépend du précédent, ce qui est une caractéristique universelle des langages. Ainsi, les théorèmes sur les « chaînes de Markov » se montrent-ils efficaces dans des domaines très variés où l'on souhaite repérer des événements liés par une structure sous-jacente. Tous ces outils sont nés des disciplines réunies sous le nom de « statistiques ». Ces statistiques sont elles-mêmes liées à l'étude des probabilités et à la loi des grands nombres, qui a débuté au XVIII^{e} siècle. Ce n'est pas tout : la molécule d'ADN est aussi un objet géométrique curieux, sujet à des nœuds qui conditionnent la traduction effective du message génétique au sein de la machinerie cellulaire. La « topologie » qui classe ces nœuds à l'aide d'expressions algébriques prend donc une part très importante dans cette recherche médicale de pointe.

Enfin, et de manière plus générale, certains mathématiciens développent des outils théoriques qui dépasseront sans doute le cadre déjà très vaste de la biologie : étudié actuellement, entre autres, par Misha Gromov, l'un des problèmes centraux de cette recherche est de reconnaître, avec des observations variées, la structure interne qui fournit ces données expérimentales. Les objets étudiés sont, en effet, à la fois présents en très grand nombre et munis d'une structure relativement lâche. L'ADN se trouve à mi-chemin entre les cristaux, qui sont très rigides et bien définis géométriquement, et des structures complètement aléatoires. Pour réaliser de telles études, les mathématiques adéquates sont encore en grande partie à créer. Avant d'éliminer les gènes du cancer ou les virus tapis dans le génome d'un patient, il faudra les trouver par la pensée, au travers des mathématiques.

Ondelettes déferlantes sur l'analyse

Comment faire tenir un grand nombre d'images dans la carte mémoire d'un appareil photo ? Comment les faire transiter le plus rapidement possible et sans dégradation via le réseau Internet ? Lorsque le contenant est trop petit pour le contenu, il faut absolument comprimer ce dernier ou, ce qui revient au même s'il s'agit d'informations, éliminer ce qui est inutile. Or, dans les images comme dans la plupart des têtes pensantes, il existe beaucoup d'informations redondantes… Ainsi, par exemple, la description : « La moitié de l'image est blanche et l'autre, noire » est-elle infiniment plus légère qu'un tableau d'un million d'éléments décrivant l'image point par point et dans lequel la moitié des valeurs est au niveau du blanc et l'autre au niveau du noir. Malheureusement, il n'existe pas de schéma universel pour décrire une image : le système de compression élaboré par le JPEG (« Joint Photographic Expert Group »), qui est devenu le compresseur standard des images du Web, procède par un découpage en petits carrés de huit éléments de côté qu'il traite avec un algorithme. Ce traitement utilise un outil mathématique découvert par Joseph Fourier, qui avançait que toutes les fonctions pouvaient se décomposer en une somme de fonctions périodiques particulières. C'est l'analyse de Fourier qui alimente depuis les années 1880 les techniques de traitement des signaux qu'examinent couramment les physiciens. Cette transformation de Fourier est une manière commode et légère de décrire les fonctions ; c'est la base de la réduction opérée par l'algorithme du JPEG. En effet, on passe de une à deux dimensions en balayant, ligne par ligne, l'ensemble des éléments picturaux, les « pixels », décrits chacun par trois ensembles de valeurs : densités de rouge, de vert et de bleu. On obtient autant de courbes qui décrivent l'image et qui peuvent bénéficier de la version rapide de la transformation de Fourier (« Fast Fourier Transform » ou FFT), découverte aux États-Unis en 1965 par James W. Cooley et John W. Tuckey, et sans laquelle l'échographie médicale, par exemple, n'aurait pas vu le jour aussi vite.

La rapidité et l'efficacité de ce traitement ont fait les beaux jours du JPEG : une réduction de 1/32 avec quelques pertes sensibles, mais un résultat bien adapté au traitement des images de la Toile. Cependant, des progrès restaient à accomplir pour améliorer les transmissions de documents issus, par exemple, des missions spatiales. Ils sont venus d'un secteur qui, *a priori*, utilisait peu les mathématiques : celui des recherches pétrolières. Jean Morlet, ancien élève de l'École polytechnique, avait inventé un outil extraordinaire d'efficacité qui, dans le domaine de l'analyse du signal, allait reléguer l'analyse de Fourier au rang de technique primitive. Dans les années 1980, lorsque les recherches de gisements ne s'effectuaient plus à l'aide d'explosions ponctuelles mais par l'application de vibrations modulées en fréquence, les vitesses de transmission dans les couches géologiques ont donné de bien meilleurs résultats. Cependant, ils étaient souvent victimes d'erreurs systématiques dues au type de signaux analysés : ces derniers perdaient de leur régularité pour comporter de fortes parties transitoires durant lesquelles s'établissait l'équilibre des différentes fréquences du spectre sonore reçu. En essayant de pallier les erreurs systématiques de l'analyse « à fenêtre » de Fourier utilisée pour ces parties transitoires, Morlet est tombé sur une description universelle et très efficace des signaux à l'aide d'ensembles de fonctions périodiques particulières qu'il a baptisées « ondelettes ». Peu de gens se rendirent alors compte de l'importance de cette découverte, mais Morlet, entre-temps remercié par son employeur (Elf), et Alex Grossman, travaillant comme Morlet à Marseille, ont réussi à mettre sur pied un algorithme spécifique pour calculer la transformation en ondelettes. Yves Meyer et Stéphane Mallat, qui les avaient rejoints, ont réussi à optimiser leur découverte pour mettre au point la FWT, « Fast Wavelet Transform », des algorithmes exacts et aussi rapides que ceux de la FFT. Depuis, les ondelettes sont devenues un champ de recherche très important ; on trouvera dans le livre de Burke Hubbard (1995) qui leur est consacré plus de détails sur cette saga, et les noms des contributeurs principaux.

Mais revenons aux images et au problème de leur compression. La FWT s'avère beaucoup plus efficace que la FFT car elle effectue mathématiquement les deux opérations que notre cerveau accomplit lorsqu'il analyse une image : elle est capable de prendre du recul, afin de percevoir les grandes lignes de la scène tout en se concentrant sur les détails significatifs, portés par des parties qui contrastent avec la densité environnante. Le JPEG 2000 est né de cette transcription mathématique par ondelettes et compresse en cinq millièmes. L'histoire de la compression des images ne s'est pas arrêtée là puisque Stéphane Mallat et son équipe ont développé des ondelettes particulières, les « bandelettes », capables de s'allonger et de suivre plus longtemps des frontières internes. Grâce à elles, sa société, Let it Wave, a développé un mode de compression capable de faire tenir une photo d'identité standard dans un fichier de seulement quelques centaines d'octets, soit une réduction par un facteur de l'ordre de cinq à dix millièmes, soit la totalité des *Essais* de Montaigne en une demi-page !
Les ondelettes ont largement dépassé le cadre du traitement d'image et on les rencontre si souvent qu'elles pourraient presque devenir une branche à part entière des mathématiques [Voir un très bon exposé dans Meyer (2005)].

La cote des mathématiques toujours en hausse

Dans un marché de plus en plus vaste et de plus en plus fréquenté, les cours des actions continuent de fluctuer au hasard des événements, des annonces et des mouvements de capitaux. Comment préserver ses intérêts, calculer ses risques et garantir ses investissements ? Tels sont les problèmes de tous les acteurs de la bourse, aussi souvent gagnants que secoués par les incertitudes d'un marché mondialisé toujours plus complexe et diversifié. « L'évolution du prix d'une action dépend d'un si grand nombre de facteurs qu'elle fluctue de manière aléatoire », avait reconnu au début du siècle dernier le mathématicien français Louis Bachelier, fondateur des mathématiques boursières. Depuis, la finance est devenue l'un des domaines de prédilection des mathématiciens des probabilités. On peut comparer l'évolution du cours des actions aux mouvements erratiques de grains de pollen flottant dans un liquide exposé à la lumière : c'est le mouvement brownien (découvert par le botaniste écossais Robert Brown). Ces trajectoires aléatoires, qui résultent de l'agitation des molécules du liquide chauffé par la lumière, forment, en deux dimensions, des dessins identiques à ceux de l'évolution du cours des actions. Ces dernières fluctuent sous l'effet cumulé des achats et des ventes réalisés par de très nombreux opérateurs. Calquée sur ce mouvement, l'équation de Black-Scholes et ses nombreuses variantes et améliorations règlent aujourd'hui la vie des banquiers. La résolution de cette équation et le « calcul stochastique » qui en découle permettent, par exemple, de fixer le prix d'une option d'achat : au jour de l'achat de l'option, le prix de l'action ou de la marchandise peut fluctuer dans les deux sens et faire perdre beaucoup d'argent au vendeur. À l'inverse, l'examen des cours et des ventes, s'ils divergent des résultats prévus par ce calcul, peut permettre de déceler une malversation ou un délit d'initié. De récents développements issus des travaux du mathématicien français Paul Malliavin pourraient permettre de démasquer les indélicats. En effet, lorsqu'un opérateur provoque lui-même une variation des cours et qu'il vend ou achète afin de profiter de la situation, les règles du mouvement brownien sont perturbées. Voilà pourquoi les spécialistes du calcul stochastique sont à la fois craints et appréciés des banquiers !

Des mathématiques définitivement discrètes

Vu de près, c'est une surface lisse d'où émergent des promontoires qui s'entendent pour réfléchir les ondes dans des directions souhaitables. Vu de loin, c'est un petit objet qui se déplace très vite dans le ciel. Le Petit Duc est un avion sans pilote, un drone, qui effectue ses missions en toute discrétion. Les radars qui balaient le ciel en émettant leurs salves d'ondes électromagnétiques ne récupèrent qu'un très faible écho, souvent assimilé au bruit ambiant, lorsqu'un tel avion furtif traverse leur zone de surveillance. Le secret de cette invisibilité tient dans la maîtrise de la propagation des ondes radar et de leur réflexion sur les surfaces de l'objet. La conception d'un tel avion aux formes apparemment très simples est une affaire de recherche pluridisciplinaire, aussi bien en physique des matériaux qu'en aérodynamique. Cependant, alors que les règles de propagation des ondes sont connues depuis un siècle, la résolution des équations correspondantes pose toujours des problèmes extrêmement complexes. Soit on essaie de résoudre ces équations en passant par une approximation effectuée avec l'aide des ordinateurs, soit on utilise des artifices, comme une frontière imaginaire qui absorbe tout ce qu'elle recueille, soit on retourne à l'optique géométrique, qui assimile les ondes à des rayons qui se propagent en ligne droite. Aucune de ces approches ne permet de dégager de solution universelle. Pourtant, au-delà des applications militaires de la furtivité, ces mêmes calculs s'appliquent aux problèmes liés à l'insonorisation des autoroutes urbaines, à l'optimisation des antennes de téléphonie mobile ou encore à la propagation de la lumière dans les fibres optiques. Toutes ces technologies pourraient bénéficier de l'optimisation des méthodes de résolution de ces équations. La discrétion du drone de Dassault et des avions furtifs modernes cache l'ampleur des développements mathématiques. Nous pourrions être surpris par les futures possibilités de nos chaînes haute-fidélité, de nos appareils médicaux, de nos ordinateurs et de toutes les technologies qui améliorent notre quotidien grâce à ces travaux aussi discrets et furtifs qu'ils sont le plus souvent abstraits mais tout à fait fondamentaux.

La liste des différentes sections des deux livrets *Mathématiques dans la vie quotidienne* (Chaleyat-Maurel, Brette *et alii*, 2001) et *L'Explosion des mathématiques* (Martin-Deschamps, Le Tallec, Waldschmidt, 2002) montre bien la multiplicité des domaines imprégnés de mathématiques ; certaines rubriques font double emploi avec notre livre, mais la « redondance » n'est-elle pas « une qualité pédagogique » ?

Des codes secrets rendus publics
Des satellites aux portables
Des images débruitées
La Bourse sans risques ?
Une météo turbulente !
Zéro dommage !
Au bout du génome !!!
De l'arbre à la forêt
Comment paver ?

II *Les mathématiques françaises de Viète à Bourbaki*

a Le grand départ des mathématiques modernes

Viète, Oresme, Fermat, Descartes, Desargues, Pascal, Clairaut

C'est avec ***François Viète*** (Fontenay-le-Comte 1540, Paris 1603) que la France entre dans les mathématiques modernes. Mieux : les mathématiques modernes commencent avec Viète, formant véritablement une « école fournie ».

Cependant, il faut mentionner brièvement ***Nicolas Oresme*** (Oresme, près de Bayeux 1325, Lisieux 1382). On a tendance à l'oublier car il est surtout connu comme théologien. Cependant, un historien soigneux comme Pierre Duhem a su montrer que dans les écrits d'Oresme se trouvent en germe les notions de coordonnée, de représentation graphique des courbes, de série convergente, d'exposant fractionnaire ; c'est aussi un théoricien de la mécanique car il découvre l'expression mathématique du mouvement uniforme et le mouvement uniformément accéléré. Conseiller du roi Charles V, Oresme inaugure la tradition française de l'intellectuel de type mathématique engagé dans les affaires de l'État.

Revenons à Viète : juriste, conseiller du prince, mathématicien en ses rares temps libres, Viète est avec Descartes le fondateur des notations algébriques modernes et de la mise en équation d'un problème ; mais on lui doit aussi d'importantes contributions en trigonométrie et géométrie. C'est le grand mathématicien de son temps, mais son œuvre est très souvent sous-estimée par les historiens.

Comme beaucoup de mathématiciens de ce temps-là, Viète n'est pas mathématicien par vocation ; il fait des études de droit à l'université de Poitiers, devient conseiller au parlement de Bretagne à Rennes, puis maître de requêtes à Paris. Banni en 1584, il en profite pour se consacrer plus encore aux mathématiques. Puis il est rappelé par Henri III comme conseiller auprès du parlement de Tours en 1589. On le retrouve à Paris au service de Henri IV.

Viète est le premier à avoir mis sur pied l'algèbre moderne. Avant lui, avec Diophante par exemple, l'algèbre n'apparaissait que comme un amas de calculs variés pour éclaircir tel ou tel problème. Il ne s'agissait que de résoudre telle ou telle équation ; mais il n'était jamais question de résoudre toute équation de la même manière. Il faut cependant dire que, dans la première moitié du XVIe siècle, des algébristes italiens avaient travaillé les équations des quatre premiers degrés, justifiant les manipulations par la géométrie. Cela, même si l'usage de lettres pour des nombres, connus ou inconnus, existait déjà. Viète est le premier à avoir introduit une notation systématique pour les inconnues et une autre pour les connues (données), à savoir des voyelles pour les inconnues et des consonnes pour les données. Ce qui permet de suivre à la trace les inconnues dans les diverses équations.

Viète écrit :

B in A Quadratum plus D plano in A aequari C solide

là où Descartes, et nous tous aujourd'hui, écririons :

$$BA^2+DA=C$$

soit, pour une équation avec une inconnue x :

$$bx^2+dx=c$$

Auparavant, on « parlait » : « Tu divises ceci par cela, tu multiplies, etc. ». Avec Viète et Descartes, relayés par Fermat, l'arithmétique devient une partie de l'algèbre, appelée le plus souvent aujourd'hui « théorie des nombres ».

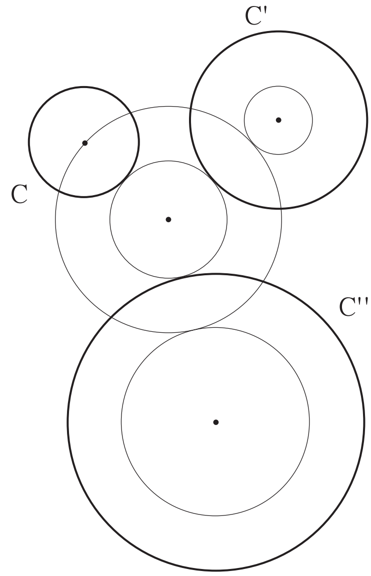
Viète plaide pour l'abandon du système sexagésimal au profit du décimal, surtout pour les fractions ; il écrit ainsi pour le nombre π (en fait, pour la circonférence d'un cercle de diamètre 200,000) :

$$\text{d'abord } 314{,}159, \frac{265{,}35}{1{,}000{,}000}, \text{ puis finalement comme nous :}$$

$$\mathbf{314{,}159},\ 265{,}36$$

en gardant les lettres grasses pour la partie entière. Il introduit aussi les signes plus et moins : $+$, $-$. Il est le premier à considérer un produit d'un nombre infini de nombres.

Fondateur de l'algèbre actuelle (avec Descartes), tant en esprit qu'en notation, Viète était, on l'a vu, encore récemment sous-estimé par les historiens des mathématiques ; mais c'était aussi un excellent géomètre. Il arrive ainsi à bout du problème d'Apollonius : construire des cercles tangents à trois cercles donnés. Pour ce faire, il utilise les propriétés de l'inversion (propriétés connues également de Descartes), mais il ne considère pas cette transformation de façon systématique, comme le fera Steiner au XIXe siècle.



Pour trouver un cercle tangent à trois cercles donnés (un vieux problème déjà posé par Apollonius), Viète réduit le plus petit cercle en son centre et diminue les deux autres en cercles concentriques autour de ce rayon. Il est donc conduit à construire un cercle tangent à deux cercles donnés et passant par un point, ce qu'il réalise à l'aide de la théorie de l'inversion (encore implicite à l'époque) qui est basée sur celle, plus ancienne, de la puissance d'un point par rapport à un cercle.

Il indique aussi comment construire les racines carrées (avec la règle et le compas, bien sûr). Et il sait que le nombre π est irrationnel (l'on est pourtant encore loin de la transcendance).

Très grand trigonométriste, il trouve la formule générale pour $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$, qui se lit, dans l'écriture actuelle :

$$\cos(nx) = \cos^n(\mathrm{x}) - \frac{\mathrm{n}(\mathrm{n}-1)}{1.2}\cos^{n-2}(\mathrm{c})\sin^2 x + \frac{\mathrm{n}(\mathrm{n}-1)(\mathrm{n}-2)(\mathrm{n}-3)}{1.2.3.4}\cos^{n-4} x \sin^4 x - \ldots$$

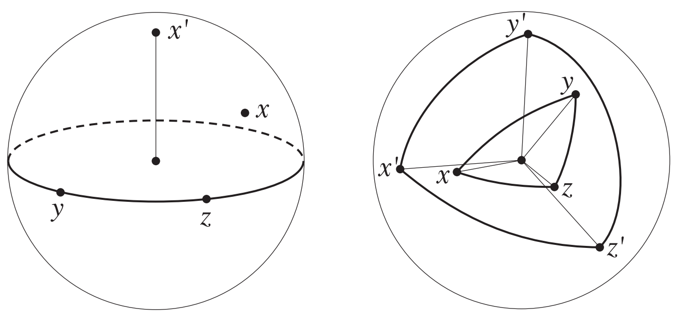
$$\sin(nx) = \mathrm{n}\cos^{n-1} x \sin x - \frac{\mathrm{n}(\mathrm{n}-1)(\mathrm{n}-2)}{1.2.3}\cos^{n-3} x \sin^3 x + ..$$

Il utilise sa connaissance des équations et de la trigonométrie pour résoudre le problème posé par l'ambassadeur des Pays-Bas à la cour de Henri IV, et « concocté » par un mathématicien originaire des Flandres, Adrien Romain : trouver les racines de l'équation de degré 45 qui s'écrit (ici, K est une constante quelconque) :

$$x^{45} - 45x^{43} + 945x^{41} - \ldots\ldots - 3795x^3 + 45x = \mathrm{K}$$

L'ambassadeur affirme : « La France n'a pas de mathématicien capable de résoudre cette équation. » Or Viète sait que le problème revient à trouver la 45e partie d'un angle donné ; et il dévisse l'équation en trois étages de trois équations de degré 3, 3 et 5 (car $45 = 3 \times 3 \times 5$).

Il est aussi le premier à introduire la notion de triangles sphériques réciproques. Il semble que ce soit le premier exemple explicite de dualité (qu'elle soit algébrique ou géométrique). Rappelons que la notion de dualité est l'une des notions sacrées des mathématiques, comme, entre autres, celle de groupe et celle d'invariant.



Triangles sphériques. Grâce à cette dualité, toute formule de trigonométrie sphérique en fournit de suite une autre sans aucun calcul. La formule fondamentale est : $\cos a = \cos b.\cos c + \cos \mathrm{A}.\sin b.\sin c$
(a, b, c, sont les longueurs des côtés et $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ les angles aux sommets).
La nouvelle formule : $\cos \mathrm{A} = -\cos \mathrm{B}.\cos \mathrm{C} + \cos a.\sin \mathrm{B}.\sin \mathrm{C}$

Au début du règne d'Henri IV, alors que celui-ci luttait contre la Ligue, alliée à l'Espagne, Viète réussit donc à décrypter les messages secrets espagnols ; Philippe II, persuadé de l'inviolabilité de ce code, se plaignit auprès du pape de l'utilisation par Viète de pratiques magiques contraires à la foi chrétienne.

Sa vue des équations algébriques fait de Viète le maillon clef entre les résolutions antérieures des équations du second, 3e et 4e degré (avec l'école italienne : Cardan, Tartaglia, Ferrari) et les progrès que leur feront faire Lagrange, Gauss, Abel et surtout Galois.

Notre mathématicien suivant est souvent appelé le « prince des amateurs en mathématiques ». Il s'agit de ***Pierre de Fermat*** (Beaumont-de-Lomagne 1601, Castres 1665). En effet, il est à temps plein juriste, homme de loi, et cette fonction lui donne droit à un titre de noblesse qu'il achète. Il est pourtant le mathématicien le plus professionnel de son époque, en ce sens qu'il étudie dans tous les domaines. C'est le premier grand théoricien des nombres (on dit indifféremment arithmétique ou théorie des nombres) car il réunit les procédures algorithmiques

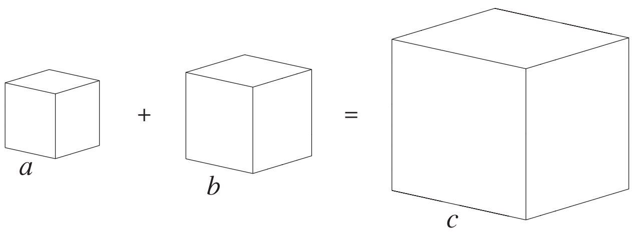
aux procédures géométriques sur des courbes. Mais il est aussi le fondateur avec Pascal du calcul des probabilités, le prophète du calcul infinitésimal et du calcul des variations.

Fils d'un riche marchand, Fermat mène une vie aisée et sans histoires (il attrape certes la peste en 1652, mais en réchappe miraculeusement), comme juriste puis comme conseiller au Parlement de Toulouse. Malgré une grande charge de travail, il fournit de très grandes contributions, essentiellement en théorie des nombres, mais aussi en géométrie et en analyse. Particularité presque unique dans l'histoire des sciences, il ne publie pratiquement aucune de ses découvertes ; en effet, les réalisant en même temps qu'il lit les œuvres de Diophante, il note alors ses résultats en marge de ce texte. Il énonce ainsi de très nombreux théorèmes, dont beaucoup d'ailleurs ne furent démontrés que bien plus tard. Mais il envoie aussi, par messager, certains de ses résultats à d'autres mathématiciens.

Fermat est connu d'un très grand nombre de personnes, scientifiques ou non. En effet, dans ses annotations du texte de Diophante, il écrit qu'il sait démontrer ce qui va suivre, qui est toujours appelé le « théorème de Fermat ». Ce résultat, qui ne fut démontré au grand jour que bien plus tard, en 1994, est fameux car son énoncé est à la portée de tous. À savoir, ce que prétendait Fermat :

> Il est impossible de trouver trois nombres entiers non nuls a, b, c tels que $a^n+b^n=c^n$ dès que n est plus grand que 2.

Pour $n = 2$, on connaît tous les nombres entiers correspondants, ils sont une infinité et faciles à écrire, ce sont les triplets pythagoriciens. Notez qu'il s'agit, via le théorème de Pythagore, de trouver des triangles rectangles dont les deux côtés et l'hypoténuse sont tous les trois des nombres entiers. Dès $n = 3$, on ne peut donc pas trouver deux cubes de côtés entiers dont le poids total (ou le volume) soit égal au volume d'un cube lui aussi de côté entier.



On ne peut jamais trouver deux cubes de côtés des nombres entiers a et b dont la somme des volumes est elle aussi le cube d'un nombre entier c, c'est-à-dire $a^3 + b^3 = c^3$

Ce « théorème » a peut-être été le plus puissant moteur de recherches en théorie des nombres. Après une accumulation de résultats mathématiques formant une voûte non complètement terminée, celle-ci a finalement trouvé sa clef (de voûte) avec Andrew Wiles en 1994. Soit plus de trois cents ans après son énoncé par Fermat. Aujourd'hui, plus personne ne croit que Fermat possédait vraiment une démonstration. Le lecteur pourra juger de la difficulté de ce théorème à ceci. Le premier résultat démontré le fut par Euler pour $n = 3$, vers 1760, par la méthode dite de descente infinie (c'est sans doute la méthode que Fermat croyait avoir su faire marcher pour tous les n). Le cas $n = 4$ est assez facile, mais pour $n = 5$, il faut attendre 1820 et Legendre, Lejeune et Dirichlet. Pour $n = 7$, Lamé, quinze ans plus tard. Se construit peu à peu la haute pyramide dont nous avons parlé, dont Kummer est l'initiateur avec sa théorie des idéaux, et qu'il serait trop compliqué d'expliquer ici. Notons seulement qu'André Weil y joua un rôle important. En revanche, Fermat s'était trompé en affirmant que tous les nombres de la forme $F_n = 2^{2^n} + 1$, dits nombres de Fermat, sont toujours des nombres premiers ; c'est vrai pour $n = 1, 2, 3, 4$: à savoir $F_1 = 3$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$, $F_4 = 65\,537$. Mais Euler a montré que $F_5 = 4\ 294\ 967\ 927 = 641 \times 6\,700\,417$; puis Landry, en 1880, que :

$$\begin{aligned} F_6 &= 18\,446\,744\,073\,709\,551\,617 \\ &= 274\,177 \times 67\,280\,421\,310\,721. \end{aligned}$$

Actuellement, on ne connaît toujours pas la réponse définitive, même à des questions intermédiaires comme : y a-t-il une infinité de ces nombres de Fermat qui sont premiers ? Cela, quitte à ce que ce soit avec des trous ; ou au contraire sont-ils tous non premiers à partir d'un certain n ? On sait seulement (par de gigantesques calculs d'ordinateur) que les F_n ne sont jamais premiers de 5 à 16, puis pour 18, 19, 21, 23, 36, 38, 39, 55, 63, 73.

Fermat est aussi un très bon analyste et un excellent géomètre ; dans des textes non publiés, d'une part on trouve presque la notion de dérivée (« presque » car à cette époque la notion de limite n'existait pas encore), mais aussi toutes les fonctions puissance dont il donne l'aire sous certaines courbes (même infinies) en relation avec une aire carrée.

Dans un autre texte, on trouve une vision de géomètre algébrique pour les courbes, meilleure même que celle de Descartes. Il conçoit, un an avant lui, le principe de base de la géométrie analytique des courbes : « Chaque fois que l'on trouve entre deux quantités une équation les reliant, nous avons un lieu, l'une des quantités décrivant une ligne, droite ou courbe. »

Il est l'un des prophètes du calcul infinitésimal et du calcul des variations, trouvant la méthode pour déterminer les *minima* et les *maxima*, à savoir chercher en premier lieu les valeurs où la dérivée s'annule, mais aussi pour obtenir la tangente à telle ou telle courbe. Cavalieri avait trouvé la formule essentielle du calcul intégral, à savoir la formule donnant l'intégrale de x^n :

$$\int_0^a x^n \, \mathrm{d}x = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

Fermat arrive à étendre doublement cette intégrale, cela pour les deux intégrales :

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^n}$$

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^n}$$

et montre que la première converge ou diverge selon que n est plus grand ou plus petit que 1, et *mutatis mutandis* pour la seconde.

Sa troisième passion a été le calcul des probabilités, dont il fut le premier — au départ pour répondre à des questions que lui posa Pascal — à développer l'étude. Notons aussi que, à l'instar de tous les savants de cette époque, Fermat contribua à la physique. En particulier, il énonça dès 1662 le principe de base de l'optique géométrique, à savoir que les rayons lumineux suivent le plus court chemin, en admettant que la lumière a une vitesse donnée dans un milieu homogène. Les développements de ce principe, en mécanique et autres disciplines, et jusqu'en mécanique quantique, sont considérables. Voir par exemple l'excellent livre de vulgarisation de Damour et Carrière (2002).

Géomètre, algébriste, fondateur, justement, de la géométrie algébrique, physicien, philosophe, gentilhomme, soldat, ***René Descartes du Perron*** [La Haye (actuellement La Haye Descartes) 1596, Stockholm 1650] révolutionne la philosophie et la science, marquant un tournant décisif dans l'histoire des idées. Il constitue avec Fermat le duo des deux plus influents savants du deuxième tiers du XVIIe siècle. Toutefois, si Descartes a été vraiment révolutionnaire en philosophie et en sciences, ses contributions mathématiques, si grandes soient-elles, sont en continuité avec celles de ses prédécesseurs, Viète au premier chef.

Venant d'un milieu aisé, il s'engage cependant comme volontaire en 1617 dans l'armée du prince de Breda, mais sans cesser de songer à la recherche scientifique, et quitte pour toujours l'armée en 1621. De santé assez fragile, très frileux, il cède pourtant aux pressions de la reine de Suède, d'autant plus que sa situation en France est difficile en raison de l'incompatibilité entre son œuvre de philosophe et les autorités religieuses, pour s'installer à Stockholm en 1649, mais y meurt dès le mois de mars de l'année suivante d'une inflammation pulmonaire.

Outre son importance pour la physique, tout spécialement l'optique (la loi des sinus de la réfraction lui est attribuée — mais elle était connue de Snellius, la loi d'inertie, etc.), et la philosophie (« Je pense donc je suis »), la publication du *Discours de la méthode* est aussi un élément fondamental dans l'histoire des mathématiques. Il est l'inventeur, avec Fermat, de la notion de coordonnées (se donner un point du plan est équivalent à se donner un couple de nombres réels). Descartes est vraiment le premier des modernes en matière de notation algébrique, un étudiant pouvant de nos jours le lire sans problème :

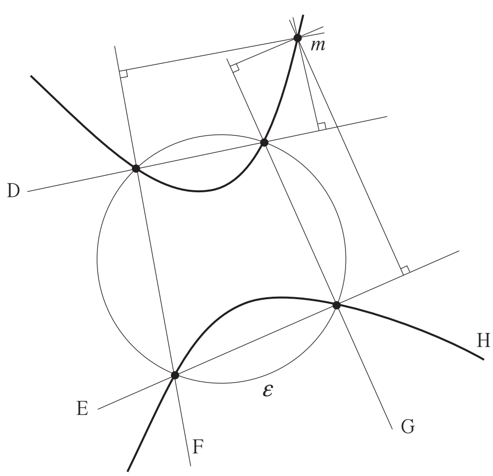
$$\mathrm{A}x^2+\mathrm{B}x+\mathrm{C}$$

Cependant, Descartes écrit encore $x.x$ au lieu de x^2, mais par contre x^6 et non pas $x.x.x.x.x.x$. Mais rien ne prouve qu'il ait vraiment imposé la règle des signes pour le produit de deux nombres éventuellement négatifs : « moins par moins égal plus ». Les nombres négatifs ont longtemps été une pierre d'achoppement pour les mathématiciens ; pas étonnant que les écoliers aient autant de difficultés avec eux ! En effet, il faut savoir que, encore au début du XIXe siècle, les nombres négatifs étaient proscrits de la géométrie. Lazare Carnot craignait que leur usage soit fait sans réflexion aucune et conduise à un manque de rigueur en matière de preuve. Mais Descartes use avec intelligence des signes. Ainsi, si $ax+by+c=0$ est l'équation d'une droite, le signe de $ax+by+c$ en un point (x,y) donne sa situation par rapport aux deux côtés de la droite.

La géométrie algébrique, en son berceau, est l'étude des courbes définies par des polynômes : ceux du second degré donnent naissance aux coniques, comme le démontre Descartes, ceux du troisième aux cubiques, etc., quand le degré augmente. À partir du XIXe siècle, suffisamment armé d'algèbre, on commença à étudier les surfaces algébriques. Il fallut généraliser la notion de variété algébrique, entre autres pour les besoins de la théorie des nombres.

Descartes est l'un des premiers à introduire la différence entre fonctions algébriques et fonctions transcendantes. Il définit la tangente à une courbe algébrique comme racine double de l'équation de l'intersection avec la courbe, définition différente de celle de Fermat (la dérivée doit être nulle). Si la définition de Fermat est la bonne pour le cas général, celle de Descartes est la bonne pour la géométrie algébrique !

Sa maîtrise de la géométrie avec coordonnées lui permet de résoudre d'un seul coup un très vieux problème, celui du « lieu à quatre droites ». Voici ce dont il s'agit : les Grecs avaient réussi à démontrer que, étant donné trois droites D, E, F, le lieu des points m tels que $\mathrm{dist}\ (m,\mathrm{D}).\mathrm{dist}(m,\mathrm{E}) = \mathrm{k}\ \mathrm{dist}^2(m,\mathrm{F})$ pour une constante quelconque était toujours une conique. Mais Pappus n'avait pas trouvé la solution du même problème appliqué à quatre droites D, E, F, G : $\mathrm{dist}(m,\mathrm{D}).\mathrm{dist}(m,\mathrm{E}) = \mathrm{k}.\ \mathrm{dist}(m,\mathrm{F}).\mathrm{dist}(m,\mathrm{G})$ est encore une conique. Pappus ne disposait pas de la géométrie analytique. La recherche du lieu à quatre droites est emblématique du génie de Descartes pour la simplicité avec laquelle il la résout. Il montre d'abord que toute équation du second degré en coordonnées est l'équation d'une conique. Il montre aussi que la distance d'un point à une droite est une fonction affine des coordonnées (précisément $\frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ en coordonnées rectangulaires). La définition du lieu à quatre droites entraîne immédiatement par multiplication que la courbe cherchée est du second degré, donc une conique. Il est amusant de noter que Descartes se trompait (mais en partie seulement) et que c'est Roberval (1602–1665, physicien lui aussi, l'homme de la balance qui porte son nom) qui lui fit remarquer que le lieu se composait en fait de deux coniques. En effet, la distance d'un point à une droite n'est pas linéaire ; c'est la valeur absolue d'une forme linéaire. Il y a donc le choix entre deux signes, d'où deux coniques. En réalité, Descartes prenait bien soin du signe, de sorte qu'il résolvait par une conique le problème du lieu à quatre droites en précisant de quel côté de la droite on se plaçait.



L'ensemble des points m tel que $\mathrm{dis}(m,\mathrm{D}).\mathrm{dis}(m,\mathrm{E}) = k\ \mathrm{dist}(m,\mathrm{F}).\mathrm{dist}(m,\mathrm{G})$ est constitué d'une ellipse $\mathcal{E}$ et d'une hyperbole H (ici pour un k convenable).

Comme géomètre, on doit à Descartes la fameuse formule dite d'Euler, qui énonce que pour tout polyèdre (convexe), le nombre des sommets plus celui des faces et moins celui des arêtes est toujours égal à deux. Mais l'attribution à Euler de cette formule reste justifiée, car Descartes ne la donne pas de manière explicite et, surtout, à la différence d'Euler, il n'en « fait rien ». Une référence passionnante pour la « formule d'Euler », avec des considérations épistémologiques fascinantes, est Lakatos (1976).

Fondateur de l'optique géométrique, on lui doit la démonstration de la fameuse loi des sinus pour la réfraction (mais elle était connue avant lui). Ce qui lui permet d'être le premier a donner une explication quantitative de l'arc-en-ciel, notamment le double arc.

Son algébrisation systématique de la géométrie ne plut pas à Jean-Jacques Rousseau : « Je n'ai jamais été assez loin pour bien sentir l'application de l'algèbre à la géométrie. Je n'aimais point cette manière d'opérer sans savoir ce qu'on fait, et il me semblait que résoudre un problème de géométrie par les équations, c'était jouer un air en tournant une manivelle » (*Les Confessions*, Folio classique, page 303). On pourrait aujourd'hui penser que Rousseau était isolé. Mais nous verrons plus loin que Poncelet fut lui aussi, à sa manière, victime de cet amour romantique de la « géométrie pure ». Mais examinons en quoi Descartes, avec sa « dictature des coordonnées », a considérablement nui à Desargues.

Gérard (ou Girard) Desargues (Lyon 1591–1661) est le prophète de la géométrie projective, le premier à commencer à fondre dans une théorie mathématique générale les propriétés de perspective que pratiquaient heuristiquement peintres et graveurs. Architecte et ingénieur militaire (il a peut-être participé au siège de La Rochelle en 1628 aux côtés de Descartes), Desargues rencontre certainement ce dernier à Paris, et gagne vite son estime. Il crée de toutes pièces la géométrie projective, en introduisant les « points à l'infini » : ce sont les points communs à toutes les droites parallèles. Dans un ouvrage fondamental, *Brouillon project d'un atteinte aux événements de rencontre d'un cône avec un plan* (cinquante exemplaires publiés en 1639), il révolutionne la théorie des coniques (qu'il appelle des coups de rouleau) : « Elles sont toutes les mêmes », car pour lui une hyperbole et une ellipse, voire un cercle, c'est la même chose si on les regarde du bon point de vue. Ce dont Pascal ne manquera pas de se servir pour son « hexagramme mystique » (le théorème de Pascal sur les hexagones inscrits dans des coniques). On a pu dire que le livre de Viète contenait en germe toute la géométrie moderne ; l'œuvre de Poncelet semble toutefois plus à même de mériter cet éloge. Comme ingénieur, il est probablement l'inventeur des engrenages épicycloïdaux, qui sont les seuls vraiment utilisés de nos jours. Pour plus de détails sur son œuvre, voir en particulier Taton (1951).

Le concept et la fondation complète de la géométrie projective ne seront vraiment achevés que par l'école allemande autour de 1850 (Plücker), en passant par Poncelet en 1820. Desargues n'a pas de successeur, à part Pascal, et son œuvre doit attendre Poncelet pour être redécouverte et fondée plus solidement du point de vue mathématique. Ce long oubli est peut-être dû à la manière dont son œuvre est écrite (le titre même de l'ouvrage — *Brouillon project* —, sa concision

font illusion), et aussi à sa faible diffusion. Mais surtout au fait que Descartes pensait que l'on ne pouvait rien faire de bon en géométrie sans se servir des coordonnées (« géométrie analytique »). Cela pourra surprendre, car Descartes estimait beaucoup Desargues ; on a vu qu'ils furent probablement tous deux actifs au siège de La Rochelle, l'un comme ingénieur (Desargues), l'autre comme militaire (Descartes). Mais Desargues a eu au moins un disciple, qui n'est autre que Pascal, dont l'on va parler juste après.

Engrenages épicycloïdaux.

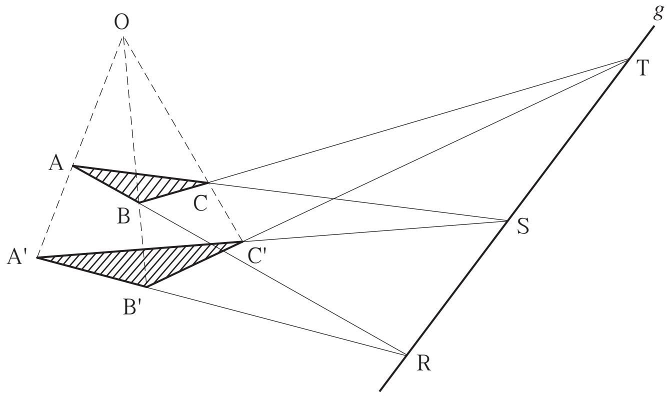
Perspective. Francesco di Giorgio Martini, *Città ideale*, *c.* 1470, Urbino.

Pour Desargues, des droites parallèles se rencontrent vraiment, mais en un point à l'infini, ce qui apparaît bien sur la gravure d'Escher mais tout autant dans la majeure partie des peintures où l'espace intervient de façon essentielle, toutes les peintures du quattrocento notamment, par exemple quand on y figure des dallages. Nous pouvons répéter ici ce que disait Hermann Weyl : « Les mathématiques sont la science de l'infini. » Chez Desargues, cet infini est celui de la géométrie.

Il faut bien réaliser le saut conceptuel qu'il y a entre, d'une part, les différents états des connaissances des artistes, peintres, etc. sur la perspective, et la création de Desargues. Le voici : pour les connaisseurs, et les théoriciens, de la perspective, les points à l'infini, la convergence de droites parallèles étaient basés sur les demi-droites issues de l'œil de l'artiste. La découverte essentielle de Desargues est de considérer les droites entières et d'y aller à l'infini « des deux côtés », le point introduit comme point à l'infini sur une droite étant le même pour les deux côtés.

M. C. Escher, *Tour de Babel*, 1928, La Haye.

La figure ci-après est appelée théorème de Desargues ; sa propriété est que les trois points d'intersection R, S, T des trois paires de droites $(AB, A'B')$, $(BC, B'C')$, $(CA, C'A')$ sont toujours en ligne droite dès que les trois droites AA', BB', CC' sont concourantes. C'est difficile à prouver si l'on reste dans le plan considéré, mais évident dès que l'on consent à voir que cette figure peut être conçue comme la projection d'une figure de l'espace : il n'y a plus qu'à savoir que deux plans de l'espace se coupent toujours suivant une droite.



Le théorème de Desargues.

Ce théorème joue certes un rôle capital en géométrie, mais il existe des géométries où il n'est plus vrai (celles dites à corps de base non associatif). Il interdit par exemple de trouver un espace géométrique à trois dimensions (à 24 dimensions réelles) dont le corps de base est celui des octaves de Cayley ; on ne peut sur ces octaves fabriquer qu'un plan à deux (16 réelles) dimensions. C'est d'ailleurs l'un des plus beaux objets de la géométrie, qualifié parfois du nom de panda.

Un traité de perspective.

Mathématicien complet, géomètre, fondateur du calcul des probabilités, algébriste, physicien, philosophe et penseur chrétien, ***Blaise Pascal*** (Clermont-Ferrand 1623, Paris 1662) est l'un des mathématiciens les plus géniaux, même si sa mort prématurée, son dilettantisme, son mysticisme et ses passions multiples l'ont empêché d'être parmi les plus féconds. Pascal partage avec Ramanujan et Galois le titre de « *greatest might-have-been in the history of mathematics* ». Un numéro spécial de la revue *Pour la science*, dans sa série « Les génies de la science », lui a été consacré (Descotes, 2003).

Doté d'une énorme capacité de travail et d'une rapidité hors du commun, il est l'un des plus doués parmi les savants universels. Il crée la brouette (à une seule roue) et les transports en commun (les carrosses à cinq sols, dont les bénéfices ultérieurs iront à Port-Royal) ; joueur invétéré avant sa conversion, mondain, il a aussi inventé et produit industriellement une machine à calculer en cinquante exemplaires. Mais, véritable dilettante, il abandonne vite les domaines où il a innové. La crise mystique qui le conduit chez les jansénistes joue également un rôle important dans son parcours.

La machine à calculer de Pascal.

Il est aussi un précurseur du calcul infinitésimal. Impossible ici de ne pas mentionner de nouveau qu'il fut un grand physicien (comme presque tous les grands savants jusqu'au XX^e^ siècle), doublé d'un philosophe.

Après son *Traité des coniques*, publié à seize ans, il fonde avec Fermat le calcul des probabilités, construit sa machine à calcul. Algébriste, il est l'un des premiers à utiliser systématiquement le principe de récurrence dans les démonstrations, cela pour les propriétés du fameux triangle de Pascal, fait œuvre de physicien et après sa conversion du 23 novembre 1654 abandonne pratiquement toute recherche scientifique. Il est alors écrivain dans *Les Provinciales* et philosophe

chrétien dans *Les Pensées* (œuvre inachevée). Cependant, il publie encore des travaux, débouchant presque sur l'invention du calcul infinitésimal, puisque Leibniz pourra écrire : « C'est en lisant Pascal qu'une lumière me vint soudain. » Ce sont ses travaux sur la cycloïde, entamés durant sa période mystique, alors qu'une rage de dents l'empêchait de dormir. Il résolut plusieurs questions sur la géométrie de la cycloïde, et la rage de dents disparut. Pascal écrivit alors : « Cela me prouva que Dieu n'est pas opposé aux mathématiques. »

Pascal s'est adressé à Fermat au sujet des probabilités, car il n'était pas sûr de lui : bel exemple de modestie scientifique. Pascal est pourtant aussi sur le point d'inventer le calcul intégral, comme Fermat l'était pour le calcul différentiel. Les amateurs de poésie difficile pourront méditer ce vers :

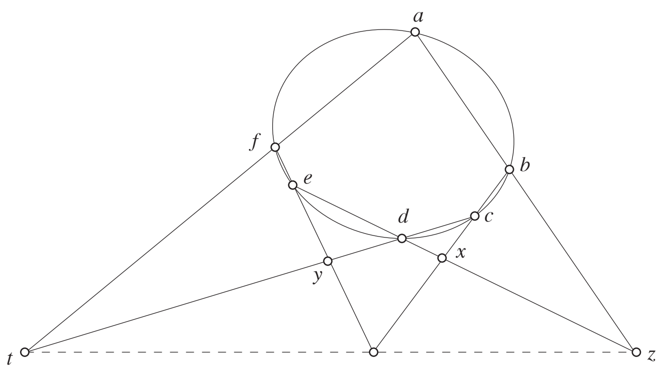
« Un coup de dés jamais n'abolira le hasard » (Mallarmé)

Ce qui est aujourd'hui appelé à tort « triangle de Pascal » était connu bien avant lui, mais il était construit à la main de ligne en ligne. Pascal, pour démontrer cela, pour prouver les propriétés multiplicatives de ses coefficients, et aussi pour remarquer que les éléments du triangle fournissent exactement les quantités combinatoires dont on a besoin en calcul des probabilités, Pascal, donc, invente, pose les fondements de ce qui est aujourd'hui appelé une démonstration par récurrence. Le principe en est assez bien énoncé par Pascal : je veux, dit-il, démontrer qu'une propriété $P(n)$ (ou une formule $F(n)$), qui dépend d'un entier n quelconque, est valable effectivement pour tous les entiers. Alors il me suffit de montrer deux choses : la propriétés est vraie au départ, soit prouver $P(1)$(resp. $F(1)$), prouver ensuite que, pour un entier quelconque, si $P(n)$ (resp. $F(n)$) est vraie, alors $P(n+1)$ (resp. $F(n+1)$) est vraie. C'est aujourd'hui le pain quotidien des élèves de lycée, mais un pain qui reste douloureux à avaler ; ce raisonnement n'est jamais enfantin à mettre en œuvre.

1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	
1	3	6	10	15		
1	4	10	20			
1	5	15				
1	6					
1						

Le triangle de Pascal.

Pour les géomètres, Pascal est aussi célèbre par son théorème sur les coniques, qu'il appelait hexagramme mystique. Ce théorème dit que, quels que soient les six points a, b, c, d, e, f d'une conique, les trois points formés à partir de cet hexagone comme points de rencontre des droites portant côtés opposés, soient les couples de droites (ab, de), (bc, ef), (cd, fa), sont toujours trois points alignés. Ce résultat n'est jamais facile à démontrer, malgré sa simplicité d'énoncé. C'est une des raisons de son attrait pour les mathématiciens. Ils n'y sont jamais indifférents, et cherchent parfois eux-mêmes leur propre démonstration.



Le théorème de Pascal.

Il reste un mystère à lever pour les historiens. Pascal disait qu'il se ramenait (à la Desargues) au cas du cercle, puisque la projection (perspective) conserve les propriétés d'intersection de droites et d'alignement de points, et que Desargues avait montré que toute conique peut se transformer en un cercle par projection adéquate. Mais, même pour un cercle, le théorème n'est pas du tout évident, et l'on n'a encore aucune idée de la démonstration de Pascal en ce cas précis. La géométrie des coniques s'endormira par la suite presque complètement avant son réveil par Monge et, surtout, Poncelet.

Très précoce, ***Alexis Claude Clairaut*** (Paris 1713–1765) fait à 13 ans sa première communication à l'Académie des sciences. Il y entre à 18 ans avec une dispense d'âge, car il fallait avoir 20 ans. En fait, il y avait déjà été élu à 16. Il fait partie de l'expédition de Laponie pour vérifier l'aplatissement de la Terre au pôle par suite de sa rotation sur elle-même, selon l'explication de Newton.

Clairaut n'a certes pas la même envergure que les cinq savants précédents, mais ce fut le premier à s'attaquer à la théorie des courbes de l'espace, à celle des surfaces de l'espace. Pour les courbes, son œuvre est riche, entre autres par l'expression analytique de leur courbure. On lui doit la notion de plan osculateur.

La notion de torsion ne viendra qu'à la suite des travaux de Monge ; mais, pour les surfaces, c'est un précurseur de l'œuvre fondamentale de Monge.

La notion de courbure, pour une courbe, est ce que l'on appelle en mathématiques un invariant. Il faut savoir que cette notion d'invariant est l'une des « paroles sacrées » des mathématiques. Il s'agit, étant donné tel ou tel objet mathématique, de lui attacher un ou plusieurs invariants, c'est-à-dire un nombre (des nombres) qui, par exemple dans le cas des courbes, ne dépendent que de la forme de la courbe et non pas de leur position dans l'espace. Nous en reverrons quelques exemples par la suite. Certains invariants sont assez faciles à découvrir, voire à calculer pour tel ou tel objet connu. Mais d'autres sont le fruit de découvertes assidues, et de plus sont souvent très difficiles, voire impossibles, à calculer.

Clairaut est le premier à avoir abordé l'étude du subtil mouvement de la Lune (suivi bientôt par d'Alembert), par des calculs du second ordre (c'est-à-dire en négligeant les puissances d'ordre supérieur du rapport de la masse de la Lune à celle du Soleil), à avoir calculé l'avance du périgée. Il prévoit aussi le périgée de la comète de Halley avec moins d'un mois d'erreur, alors même que les masses de Saturne et Jupiter étaient mal connues à l'époque.

Ainsi Clairaut constitue-t-il une transition, et l'on a pu dire à juste titre que, pour ce qui est de la géométrie, si le XVII^e siècle fut celui des courbes, le XVIII^e fut celui des surfaces.

La sécheresse partielle qui se produit alors jusqu'à la Révolution peut s'expliquer « en sociologue ». Nous ne le ferons pas, donnant seulement quelques pistes dont nous ne sommes pas sûrs. En matière de génies, c'est la « loi des petits nombres » qu'il faut considérer. Les hommes exceptionnels n'arrivent pas régulièrement, ne sont pas répartis plus ou moins uniformément. Cela d'autant plus que la population des chercheurs potentiels à l'instant donné est petite, ce qui est particulièrement le cas jusqu'à la Révolution. Mais ce n'est pas une raison pour ne pas prendre en compte d'autres facteurs, positifs ou négatifs, comme l'environnement social et politique. Nous en parlerons au fur et à mesure. Cette loi des petits nombres n'est toutefois pas acceptée unanimement.

C'est aussi le moment de remarquer que la professionnalisation des chercheurs est alors très loin du point où elle se situe de nos jours. Tous les chercheurs de cette époque, tel Fermat, sont indépendants, non universitaires, en ce sens que leur travail n'est pas lié à une institution, l'Université d'alors en France ne réclamant aucune « recherche » mathématique. En outre, aucune académie ne regroupe les discussions autour des travaux effectués. L'édition scientifique est le fait d'imprimeurs isolés, il n'y a aucun « journal » mathématique. Le premier en

France date de 1810 ! Une bonne part des mathématiques se transmet par lettres. Les mathématiciens ont une profession, plus ou moins à plein temps. Il faut mentionner le rôle des mécènes, mais nous avons vu le cas tragique de Descartes, qui n'osa pas refuser l'invitation de la reine Christine de Suède. En réalité, elle ne réclamait pas des mathématiques, mais de la philosophie !

Bref, que s'est-il passé avant la Révolution ? Dans l'ouvrage de Boyer (1968), entre le chapitre XVIII, « Le temps de Descartes et de Fermat », et le chapitre XXII, « Les mathématiciens de la Révolution française », on trouve quatre chapitres : XVIII, « Une période de transition », XIX, « Newton et Leibniz », XX, « L'ère Bernoulli », XXI, « L'âge d'Euler ». Le chapitre XVIII étudie de nombreuses contributions mineures venues d'un peu partout, tandis que le chapitre XIX étudie l'apport fondamental, simultané (avec d'inévitables querelles de priorité), de Leibniz et Newton, et du calcul infinitésimal (notions de dérivées, de suites infinies convergentes, de géométrie infinitésimale, etc.). Notions à la porte desquelles Pascal était resté. Les querelles sur les « infiniment petits » continuèrent longtemps, avant que Cauchy ne les résolve définitivement avec la notion de limite. En effet, sans cette précision que constitue la limite, les mathématiciens se sentaient en milieu peu sûr : les Anglais travaillaient avec les « fluxions », les Allemands avec les infiniment petits, toutes choses maniées habilement, avec des résultats remarquables, mais sans définitions sous-jacentes précises. Euler (né à Bâle, mais qui fit la plus grande partie de sa carrière en Russie, appelé par la grande Catherine sur la recommandation de Bernoulli, et à Berlin) se sert du calcul infinitésimal pour résoudre un nombre énorme de problèmes, tant géométriques qu'en analyse ; la dynastie des Bernoulli contribue aussi à cette évolution (on n'oubliera pas non plus le Français Guillaume de L'Hôpital). Si grand soit Euler, on peut se risquer à dire qu'il est un peu moins profond que Lagrange. Mais si l'on ne devait retenir qu'une seule des innombrables formules d'Euler, ce serait la plus simple et la plus belle de toutes les mathématiques, à savoir celle qui relie les trois nombres les plus importants de cette discipline, la base e des logarithmes népériens (qui figure dans toutes les branches de la science), le nombre « pi », π, qui fournit la longueur du cercle, et enfin i, la base des nombres complexes (qui est tel que $\mathrm{i}^2 = -1$, alors que chez les nombres réels ordinaires, un carré est toujours positif : on la retrouve dans presque toutes les disciplines scientifiques, surtout en physique). Cette formule d'Euler est :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$$

Le calcul intégral se développe aussi ; mais la notion d'intégrale, celle de calcul intégral et les règles qui les régissent faisant toujours plus ou moins difficulté, il faudra attendre Lebesgue pour clore pratiquement les questions essentielles.

À ces époques, l'intégrale est simplement conçue comme l'opération inverse de la dérivation. Euler domine le début du XVIIIe siècle, mais, pour la suite de ce siècle, il doit partager cette gloire avec Lagrange.

b Autour de la Révolution

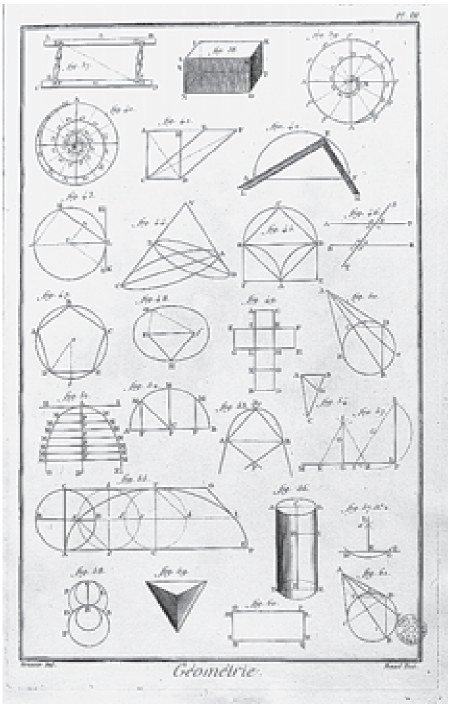
D'Alembert, Laplace, Lagrange, Legendre, Condorcet, Monge, Fourier, Galois, Cauchy, Liouville, Poncelet, Chasles, Carnot, Germain, Poisson

On notera que c'est à partir de cette période que se fait jour un certain professionnalisme, allant plus ou moins de pair avec des structures comme l'Académie des sciences, les Écoles polytechnique et normale supérieure. Les universités restent pratiquement inexistantes. Mais l'événement le plus important est peut-être celui-ci : on a pu dire que, pour l'historien des mathématiques, le passage du XVIII^e au XIX^e siècle est déjà fait en 1794, date de la fondation de l'École polytechnique. Il n'y a aucun doute que l'objectif est d'abord de former des ingénieurs, civils ou militaires, au service de la nation. Mais cette école sert directement les mathématiques, comme Felix Klein le remarque bien dans son histoire des mathématiques au XIX^e siècle (Klein, 1979). Le raisonnement était assez simple : puisque les mathématiques connaissaient depuis les Lumières un développement sans précédent, elles donnaient l'image d'une connaissance dynamique, révolutionnaire même, qui, enseignée à tous les élèves, pouvait les préparer à bien envisager toutes les sciences d'applications dans d'autres écoles, aux Ponts-et-Chaussées, aux Mines, au Génie maritime, etc. C'est seulement par la prétention à la généralité fournie par les mathématiques que l'école a pris son nom de Polytechnique : elle prépare naturellement à toutes les techniques. Et tout particulièrement aux techniques sophistiquées dont un État moderne peut avoir besoin.

Dans tous les pays, et encore aujourd'hui de façon spectaculaire aux États-Unis, la recherche scientifique, même en mathématiques ultra-abstraites, est liée à la défense militaire. Pas assez au secteur civil. Nous y reviendrons, car il y a eu là un ver dans le fruit ; ver résorbé en partie, même si partout se profile le danger que les mathématiques soient devenues trop ardues, peu payantes en termes de salaire, et même que de nombreux docteurs en mathématiques « pures » quittent la recherche pour entrer dans les salles de marché des grandes banques.

Certains lecteurs pourront s'étonner de l'énorme production, en qualité, en quantité, en variété, des mathématiques françaises durant la Révolution, alors que tous ses acteurs risquaient leur vie dans un climat de lutte politique intense. Notez qu'il n'y eut aucun mathématicien guillotiné ! Cela prouve que la stabilité politique et les moyens financiers ne sont pas des conditions absolument nécessaires aux créations de génie. Dans le domaine musical, on constatera de même que les deux grands compositeurs de la deuxième moitié du XX^e siècle que sont Chostakovich et Prokoviev firent tous les deux carrière sous le régime stalinien.

Jean Le Rond d'Alembert (Paris 1717–1783) est un scientifique complet. Il est d'abord célèbre, en dehors des mathématiques, pour avoir été un élément déterminant dans la rédaction et la parution de *L'Encyclopédie*.



Une planche scientifique extraite de *L'Encyclopédie*.

Il est également connu pour avoir donné le premier essai presque complet du théorème énonçant que tout polynôme possède au moins une racine (certes, un nombre complexe en général). C'est le théorème fondamental de l'algèbre, que Gauss sera le premier à démontrer complètement.

En mécanique, on lui doit les fondements, avec Euler et Lagrange, de la mécanique des corps solides. Son *Traité de dynamique* contient beaucoup de travaux sur la mécanique céleste. On y trouve un résultat de base, appelé par tous, aujourd'hui, principe de d'Alembert. D'Alembert s'inscrit ainsi dans la lignée de ceux qui étudient la mécanique céleste, dont l'étude domine l'histoire de la science depuis toujours ; nous y rencontrerons par la suite Lagrange, Laplace, Poincaré, Herman, le trio Kolmogorov-Arnold-Moser, etc.

D'Alembert est le premier à introduire, dans l'équation des cordes vibrantes, cette formule :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Il est le premier à parler d'onde. Il montre que les solutions sont de la forme $f(x+vt)$ et $f(x-vt)$ (la solution complète sera donnée par Fourier). C'est pourquoi aujourd'hui, dans l'opérateur différentiel :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = - \Delta$$

qui opère ici pour les fonctions de trois variables, est appelé le d'Alembertien et

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

est appelé le laplacien. Nous retrouverons d'ailleurs amplement Laplace plus loin. Cette introduction de la notion d'onde pour décrire les vibrations d'une corde est essentielle, car c'est ce qui fait le lien entre mathématique et physique ; d'Alembert étudie en particulier la réflexion de ces ondes aux extrémités de la corde.

C'est le moment de revenir sur le cas des nombres négatifs, aujourd'hui si naturels. Nous en avons déjà parlé plus haut. Ils restaient encore mystérieux, faisaient peur, puisque même d'Alembert perd courage à leur sujet, dans *L'Encyclopédie*. Il écrit : « Les règles des opérations algébriques sur les quantités négatives sont admises généralement par tout le monde et reçues généralement comme exactes, quelqu'idée qu'on attache d'ailleurs à ces quantités. »
Ces nombres négatifs ne seront admis que lorsque la géométrie analytique en donnera une « interprétation » commode (voir Bourbaki, 1969, p. 30).

C'est enfin un écrivain de premier plan : les amateurs pourront faire leurs délices de sa correspondance avec Lagrange ; on la trouve dans le volume 134 des œuvres complètes de ce dernier.

Mathématicien, physicien et astronome, ministre, philosophe du déterminisme et créateur des probabilités modernes, voici ***Pierre Simon, marquis de Laplace*** (Beaumont-en-Auge 1749, Paris 1827). Fils d'un fermier normand, arrivé sans argent à Paris et soucieux de gagner sa vie, Laplace cherche à se faire introduire chez d'Alembert par un ami de celui-ci. Il n'obtient aucune réponse. Il envoie alors une lettre à d'Alembert dans laquelle il expose brillamment les principes de la mécanique, dont le déterminisme. D'Alembert lui ouvre sa porte sur ces mots : « Monsieur, vous avez remarqué que je n'ai pas fait cas de vos recommandations ; vous n'en avez pas besoin, vous vous introduisez bien mieux tout seul. » Quelques jours plus tard, Laplace obtient un poste à l'École militaire, et l'amitié entre les deux hommes dure jusqu'à la mort de d'Alembert. Laplace illustre bien la liberté individuelle française (« l'esprit frondeur ») ; tout jeune, il écrit, poliment certes, à d'Alembert : « Monsieur, votre théorème est faux. » Ce dont il s'agit est en fait l'unicité (ou non) des solutions des équations différentielles ; c'est Cauchy qui résoudra complètement le problème. On comprend cette amitié car, dans sa lettre, Laplace n'avait pas craint d'intégrer des preuves fournies par d'Alembert. On doit à Laplace cette belle phrase : « Une des plus fortes passions est l'amour de la vérité dans l'homme de génie. »

Peu intéressé par les idées révolutionnaires, il ne s'engage que dans les assemblées requérant la présence des académiciens. D'ailleurs, l'Académie des sciences, dont il fait partie, est supprimée en 1793. Il enseigne pourtant à l'École normale et participe à la réforme révolutionnaire des poids et mesures, dont on sait qu'elle est devenue très rapidement universelle, malgré une résistance anglo-saxonne farouche, qui dure encore (sauf dans les échanges scientifiques de haut niveau), et ce pour combien de temps encore ?

Napoléon le nomme ministre de l'Intérieur, un poste tenu un certain temps par Carnot. Mais il n'a pas de sens pratique, et Napoléon doit s'en débarrasser. On trouve dans le *Mémorial de Sainte-Hélène* cette plaisanterie à son propos : « Laplace apporte l'esprit des infiniment petits dans la gestion des affaires. » Puis il entre au Sénat, dont il devient président puis chancelier. Bien que Napoléon l'ait comblé d'honneurs, il vote sa déchéance en 1814 et se rallie à Louis XVIII, qui le nomme marquis et pair de France. Tout cela ne l'empêche pas d'accumuler une énorme production scientifique, dès son plus jeune âge jusqu'au-delà de la cinquantaine. Il fonde un groupe de savants, appelé l'École d'Arcueil. On y trouve les noms de Berthollet, Chaptal, Gay-Lussac, Thénard, Dulong… Les amateurs de littérature pourront comparer l'École d'Arcueil avec le cénacle dépeint dans le volume de la « Chronique des Pasquier » de Georges Duhamel intitulé *Le Désert de Bièvres*.

On peut comparer les deux « grands L », Laplace et Lagrange, comme on le fera plus tard pour Weil et Leray. Comme Weil, Lagrange fait des mathématiques en profondeur et « pour elles-mêmes » ; tandis que les mathématiques, pour Laplace comme pour Leray, sont un moyen et non une fin, même s'il faut continuellement perfectionner cet outil. D'ailleurs, tous les ouvrages de Laplace sont précédés d'une introduction heuristique, c'est-à-dire qui explique, qui motive, ce qui va suivre en plus formel. Quoi qu'en disent certains, il est communément admis aujourd'hui que les mathématiques progressent sur une double poussée, celle du désir de comprendre et celle du désir d'être utile aux autres sciences. Notre science n'est jamais allée très loin lorsqu'elle s'est contentée d'un seul de ces deux volets, tous deux essentiels, mais bien sûr avec des passerelles entre les deux.

Laplace est le premier grand nom dans l'histoire du déterminisme. Napoléon à Laplace : « Il est dommage que vous n'ayez pas mentionné Dieu dans vos remarquables travaux. » Réponse de Laplace : « Sire, je n'ai pas besoin de cette hypothèse. » Lagrange, mis au fait, dit : « Ah ! mais c'est une belle hypothèse. » Mais il faut surtout ajouter qu'il est en même temps l'un des grands fondateurs de la théorie des probabilités. Une analyse fine de ses écrits montre qu'il n'y a dans cette bicéphalité aucune contradiction, ni aucun paradoxe. C'est à cette fin qu'il étudie l'équation aux dérivées partielles d'équation :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Cet opérateur sur les fonctions est fondamental en EDP (sigle essentiel que nous retrouverons partout, par la suite, pour « équations aux dérivées partielles ») et est appelé, désormais et pour toujours, le laplacien. Il généralise les ODE, à savoir les « équations différentielles ordinaires ». Les ODE traitent les équations différentielles à *une* variable seulement, tandis que les EDP comportent plusieurs variables ; il y a là un saut considérable tant en difficulté qu'au niveau conceptuel.

Les contributions de Laplace sont extrêmement nombreuses. En voici quelques-unes parmi les plus marquantes. En analyse, d'abord, son nom reste attaché à deux objets : la transformation de Laplace, et le laplacien, vu plus haut. La transformation de Laplace opère sur les fonctions f en en formant une nouvelle $L(f)$. Elle est définie par l'intégrale :

$$L(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

Le laplacien est un opérateur sur les fonctions qui conditionne énormément d'équations de la physique, celle des cordes vibrantes vue plus haut chez d'Alembert, celle de la chaleur, celle des ondes, mais aussi l'électrostatique. Laplace réussit à l'intégrer explicitement dans plusieurs cas. La transformée de Laplace est un outil analogue à la transformation de Fourier, mais elle reste entièrement dans le domaine réel. Elle est utilisée dans de nombreux contextes. Elle permet en particulier à Laplace d'intégrer toute une série d'équations différentielles (ordinaires, cette fois-ci !).

Laplace est le plus grand nom dans l'histoire des probabilités avant le XX^e siècle.

Avec de Moivre et Tchebichev, il participe au grand trio fondateur des probabilités modernes, même si Gauss peut être aussi crédité d'un certain rôle. Il est le premier à avoir essayé de parler d'un « objet pris au hasard » (random object), un concept entièrement clarifié par Kolmogorov, en 1967 seulement. Il étudie la loi normale (découverte en même temps que Gauss), et il est enfin l'un des premiers à avoir calculé l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$$

Voici comment (c'est l'une des plus belles « astuces » des mathématiques) :

pour montrer que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$, on utilise l'astuce sensationnelle de calculer son carré et de passer en coordonnées polaires où l'intégration est banale :

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx.\int_0^{\infty} e^{-y^2}\,dy &= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy\\ &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\infty} r\,e^{-r^2}\,drd\theta\\ &= \frac{\pi}{2}\left[-\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Bref : *« Patience, patience,*
« Patience dans l'azur
« Chaque atome de silence
« Est la chance d'un fruit mûr »
(Paul Valéry)

La deuxième contribution de Laplace au calcul des probabilités est encore plus importante : c'est la loi des grands nombres, avec ses deux affirmations : la première est qu'après de nombreuses expériences, les résultats tendent vers la valeur moyenne (c'est assez intuitif), mais le drame est qu'il faut un nombre de tirages qui est de l'ordre du carré de la précision que l'on désire. Cela, ce n'est pas du tout intuitif. C'est important, par exemple, pour les essais de médicaments car si l'on veut une « certitude » de l'ordre d'un pour cent, il faut tester 10 000 patients, ce qui est irréalisable la plupart du temps. Pour une exposition très pédagogique, très bien détaillée et très complète, et ne nécessitant aucune connaissance préalable, on pourra lire Lesigne (2001).

Astronome, il est le premier à expliquer les perturbations dans l'orbite des planètes. C'est aussi un grand nom en mécanique, après Newton. Le *Traité de mécanique céleste* est considéré à l'époque comme le sommet de la théorie

de la gravitation de Newton. Mais, pour ce faire dans l'esprit expliqué plus haut, il introduit une ébauche de calcul matriciel, et la méthode dite *de Laplace* pour le calcul d'un déterminant (le mot *déterminant* est dû à Cauchy). Il étudie aussi l'attraction des ellipsoïdes (car la Terre est en très bonne approximation un ellipsoïde de révolution). Il détermine le potentiel newtonien d'un ellipsoïde homogène par des fonctions elliptiques. Il est célèbre pour avoir, suivant une idée de Kant, suggéré l'origine du monde à partir d'une nébuleuse primitive. Il est aussi le premier à se poser la question de la stabilité du système solaire en en donnant une « preuve » alors que les outils mathématiques manquent encore, et de loin. En outre, il ne travaille qu'avec le Soleil, la Terre et Saturne.

En optique, on lui doit une approche statistique, révolutionnaire à l'époque, de la réfraction et son utilisation pour son influence sur l'évaluation des reliefs. On lui doit aussi la première analyse correcte de la vitesse du son, Newton s'étant trompé parce que trop théoricien. Il contribue à la cartographie de la France en 1819 : c'est la future carte d'état-major au 1/80 000.

À la fin de sa *Mécanique céleste*, on trouve en supplément un texte sur la théorie de l'action capillaire, où il démontre la formule essentielle qui affirme que la pression du film formé par un objet capillaire (pensez aux bulles de savon, entre autres) est proportionnelle à la courbure moyenne de la surface (notion introduite par Sophie Germain). C'est ce qui finalement permet de démontrer aujourd'hui (Hopf, 1951 ; Alexandrov, 1958) que les bulles de savon sont vraiment des sphères (rondes) ; voir par exemple le numéro spécial de *Pour la science* sur la sphère (Berger, 2003) ou, mieux encore, le chapitre VI de Berger (2006).

Œuvres : *Exposition du système du monde*
Théorie analytique des probabilités
Essai philosophique des probabilités
Mécanique céleste

Avec le Suisse Leonhard Euler, le Français ***Joseph Louis Lagrange*** (Turin 1736, Paris 1813) est l'un des deux géants du XVIIIe siècle ayant fondé l'analyse moderne ; et comme pratiquement tous les savants de son époque, c'est un mathématicien complet : en géométrie, en algèbre, en mécanique et en astronomie. De nombreux mathématiciens ont « leur » rue à Paris, mais seule celle que l'on a baptisée d'après Lagrange est vraiment large, les autres étant plutôt étroites !

Laplace a dit de Lagrange : « Il possédait au plus haut point ce tact heureux qui, faisant discerner dans les objets les principes généraux qu'ils recèlent, constitue le véritable génie des sciences : ce tact, joint à une rare élégance dans l'exposition des théories les plus abstraites, caractérise Lagrange. » À propos de l'iconographie chez Lagrange, ce dernier étant l'homme de la rigueur algébrique, il n'y a pas une seule figure dans la *Mécanique analytique*. Nous nous permettrons de le trahir pour illustrer le présent texte.

Né à Turin d'un père d'origine française, il est le plus jeune d'une famille de onze enfants. Très tôt, il se passionne pour l'astronomie et les mathématiques, grâce à la lecture d'un mémoire de l'astronome anglais Halley (celui de la comète). À dix-neuf ans, il est déjà professeur à l'École d'artillerie de Turin et publie ses premiers résultats. Il écrit à Euler une lettre où il résout le problème isopérimétrique — sa solution est certes incomplète, mais notons ici qu'il faudra attendre Weierstrass en 1870 pour avoir la première démonstration complète de cette inégalité, énoncée aux alentours de 814 avant J.-C. ! Pour plus de détails sur l'histoire passionnante de l'inégalité isopérimétrique, voir entre autres Berger (2006), chapitre VI, ou Berger (2003), dans le chapitre correspondant de ce numéro de *Pour la science*.

Le père de Lagrange était trésorier du roi de Sardaigne. À la suite de spéculations financières, il se retrouva ruiné. Plus tard, son fils affirmera : « Si j'avais été riche, je n'aurais jamais consacré ma vie aux mathématiques. » Installé définitivement en France, il la considère comme la patrie de ses ancêtres, refusant de nombreuses offres de poste en Italie. Il obtient même la jouissance d'un appartement au Louvre.

De 1766 à 1787, il est à Berlin, car Frédéric le Grand, « le plus grand roi d'Europe », veut à ses côtés « le plus grand mathématicien du monde ». C'est alors l'apogée de ses découvertes. À la mort de Frédéric, il accepte l'invitation de Louis XVI et s'installe à Paris. Pendant la Révolution, il s'occupe de pérenniser le système métrique. Napoléon le nomme comte et sénateur. Il meurt comblé d'honneurs par la Révolution, la République et l'Empire. Il est enterré au Panthéon. Durant la Révolution, Lagrange reste neutre et ne s'engage ni d'un côté ni de l'autre. Cependant, la période de la Terreur le révolte. Quand le chimiste Lavoisier est décapité, il affirme : « Seul un instant a été nécessaire pour couper cette tête, il faudra probablement plus d'un siècle pour en faire une semblable. »

Après la mort de sa première femme, Lagrange, devenant dépressif, est hanté par la solitude. La fille de l'astronome Lemonnier, de quarante ans sa cadette, se désole tant de le voir si malheureux qu'elle lui propose de l'épouser. Lagrange se soumet, sa deuxième femme lui redonne la joie de vivre et ses productions scientifiques redeviennent de qualité. L'heureux époux affirme alors que de tous les prix du monde, celui qui a le plus de valeur est celui de sa jeune femme, tendre et dévouée.

Lagrange est à faire figurer sur la liste des grands maîtres par leur influence sur l'école mathématique française : Monge, Bourbaki, Henri Cartan, Laurent Schwartz, Jacques-Louis Lions et Grothendieck lui devront beaucoup.

En algèbre, il introduit les fameuses résolvantes de Lagrange et annonce l'impossibilité de résoudre les équations générales de degré cinq ou plus : il est ainsi le précurseur d'Abel et de Galois ; qui plus est, c'est en lisant Lagrange que Galois se passionnera pour la résolution des équations algébriques. Il démontre aussi que tout nombre entier est somme de quatre carrés, un théorème très recherché, qu'Euler lui-même ne put obtenir ! Toujours en grand théoricien des nombres, il donne la première étude fine des entiers qui peuvent s'écrire comme $ax^2 + 2bxy + cy^2$, étude poursuivie ardemment par Gauss, Dirichlet, etc. ; et, toujours en algèbre, ses formules d'interpolation, même si elles ne sont pas conceptuelles, demeurent fondamentales.

Pour tout nombre entier n, il existe toujours quatre nombres entiers a, b, c, d tels que

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = n$$

En théorie des nombres, il donne, en 1766, le plus beau des théorèmes sur les fractions continues : si un nombre est racine d'une équation du second degré à coefficients qui sont des nombres entiers, alors son développement en fraction continue est périodique (le résultat inverse est dû à Euler).

$$a + \cfrac{b}{c + \cfrac{d}{e + \cfrac{f}{g + \cfrac{h}{i + \ldots}}}}$$

Une fraction continue.

Pour la notion de fraction continue, voir l'excellent article de vulgarisation dû à Brezinski (2004). Cette notion, difficile, la seule que possédaient les Grecs pour les nombres irrationnels, n'était pas du tout tombée dans l'oubli, mais restait l'apanage des théoriciens des nombres. Elle vient de revenir en force, à la fois pour l'étude des systèmes dynamiques et, plus encore, pour le calcul électronique ; celui-ci en effet ne connaît que le discret, pas le continu.

Toujours en algèbre, Lagrange est aussi le premier à avoir essayé de fonder sérieusement l'existence des nombres réels (irrationnels compris, s'entend), construction terminée par Charles Méray en 1869, simultanément à beaucoup d'autres (Weierstrass, Dedekind…).

En analyse, il est vraiment avec Euler le fondateur du calcul des variations, en introduisant par exemple les multiplicateurs de Lagrange, d'usage désormais constant. Son essai de démonstration de l'inégalité isopérimétrique en constituait la semence. Il est aussi parmi les premiers à attaquer la résolution (locale, certes) des équations aux dérivées partielles. Il participe à la création et à l'étude des fonctions elliptiques, qui sont les premières fonctions les plus simples généralisant et prolongeant les fonctions trigonométriques classiques sinus, cosinus, tangente. Mais il n'arrive pas à démontrer, alors qu'il en a fortement besoin pour la géométrie et la mécanique, que les valeurs propres des matrices symétriques 3×3 sont toutes réelles. Ce sera là l'une des grandes contributions de Cauchy.

Ayant un grand souci de l'élégance, il est le premier à écrire la notation moderne des dérivées : $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, etc. , ainsi qu'à donner les formules en coordonnées pour l'aire d'un triangle et le volume d'un tétraèdre, préludant ainsi à la notion de déterminant telle qu'introduite par Cauchy. Bien qu'il ne soit pas un géomètre dans l'âme, il est le premier à donner la formule de la distance $\mathrm{D}(\mathrm{X},\mathrm{P})$ d'un point $\mathrm{X}=(p,q,r)$ à un plan P d'équation $ax+by+cz+d=0$, à savoir :

$$\mathrm{D}(\mathrm{X},\mathrm{P}) = \frac{|ap + bq + cr + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

On a déjà vu que, pour la distance à une droite, la formule analogue était due à Descartes.

Le nom de Lagrange est aussi attaché au théorème le plus important de la théorie des groupes (même si elle est aujourd'hui devenue complètement élémentaire, on n'oubliera pas que la théorie abstraite des groupes a mis très longtemps à se développer) ; ce théorème dit que le nombre d'éléments d'un sous-groupe d'un groupe fini quelconque est toujours un diviseur du nombre d'éléments du grand groupe de départ.

En géométrie « pure », Lagrange conjectura le théorème de rigidité de Cauchy pour les polyèdres convexes.

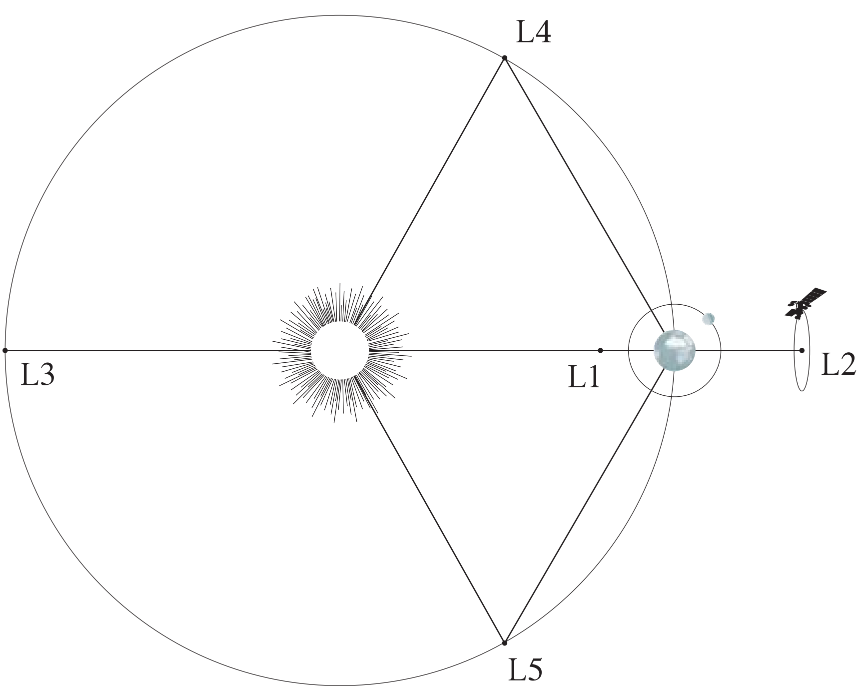
Lagrange n'a pas manqué de s'intéresser à la théorie des surfaces, entre autres celle des surfaces dites *minima*, c'est-à-dire celles qui représentent les figures d'équilibre des films d'eau savonneuse qui se forment quand on trempe dans un tel liquide une courbe en fil de fer. Ce problème est aujourd'hui appelé problème de Plateau, plutôt à tort. Plateau ne fit que des expériences physiques, certes intéressantes, mais ne démontra jamais aucun théorème d'existence de tels objets. La théorie des surfaces *minima* est encore à ce jour l'objet de nombreuses et profondes études, avec encore beaucoup de problèmes non résolus.
Mais c'est vraiment à Laplace, dans son mémoire *Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales définies* (1762), que l'on doit la genèse de cette théorie.

Mais sa grande célébrité provient également de ses contributions à la

mécanique. Il démontre que le mouvement en mécanique, sous des conditions assez générales, est donné par les fameuses équations de Lagrange. Dans l'avatar moderne de la mécanique formalisée mathématiquement « à la Lagrange », la géométrie symplectique, un rôle essentiel est joué par les objets appelés en son honneur sous-variétés lagrangiennes. Son livre *Mécanique analytique* est l'un des textes fondateurs de la physique mathématique. Son nom est aussi attaché aux crochets de Lagrange. Et pour le cas de la mécanique du système solaire, l'on trouve les points de Lagrange ; dans la détermination des orbites des satellites artificiels, ils jouent, là encore, un rôle essentiel.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_j} = 0, \qquad j = 1, 2 \ldots, n$$

Les équations de Lagrange sont incontournables pour tout étude de mécanique. Dans cette équation, $\dot{q}_j = \mathrm{d}q_j \,/\, \mathrm{d}t$, et $\mathfrak{L} = \mathrm{T} - \mathrm{U}$ (T = énergie cinétique, U = énergie potentielle) est une fonction de q_j et $\dot{q}_j$ appelée *Lagrangien*.



Les points de Lagrange du système solaire.

Œuvres : *Réflexions sur la résolution algébrique des équations* (1770)
Mécanique analytique (1788)
Théorie analytique des fonctions (1797)
Leçons sur le calcul des fonctions (1804)
Mémoire sur la théorie des variations des éléments des planètes (apparition de la géométrie symplectique)
Essai sur le problème des trois corps (1772), que l'on peut encore lire aujourd'hui « sans dictionnaire »

Le plus grand malchanceux de l'histoire des mathématiques est ***Adrien-Marie Legendre*** (Paris 1752, Auteuil 1833) : ses travaux ont toujours donné naissance à d'importantes théories, mais c'est presque toujours après avoir été repris par des esprits plus puissants.

Il forme, avec Lagrange et Laplace, le trio dit des trois L — ces trois L, pour les historiens, prennent place dans le sextuor des grands, aux côtés de Condorcet, Lazare Carnot et Monge. Condorcet fut politiquement le plus actif des six, mais celui que la Révolution traita le moins bien. Quant à Legendre, qui s'opposa à toutes les pressions politiques sur le monde scientifique, on lui retira sa retraite, et il finit sa vie dans la misère et l'abandon.

Contrairement à celle de Lagrange et de Monge, la vie de Legendre se déroule cependant dans le plus grand calme, tout comme celle de la plupart des savants modernes. Legendre enseigne, de 1775 à 1780, à l'École militaire, puis, à partir de 1795, à l'École normale supérieure. Il écrit de nombreux livres, en particulier les *Éléments de géométrie*, afin de pallier l'état dramatique où était tombée cette discipline en France. En France, mais aussi à l'étranger ; c'est ainsi que, pour de nombreuses années, en Amérique, le nom de géométrie fut associé à celui de Legendre. La traduction de son livre par Thomas Carlyle connut plus de trente éditions...

Mais Legendre n'a ni l'originalité ni la profondeur des travaux de Laplace, Lagrange ou Monge. Ses travaux sur la mécanique, entre autres la détermination du potentiel newtonien d'un ellipsoïde homogène, le conduisent à démontrer des résultats importants sur ces fonctions elliptiques, mais il reste au seuil de leur compréhension profonde, finalement due à Abel, Jacobi et Riemann. C'est toujours grâce aux fonctions elliptiques qu'il intègre le mouvement d'un corps solide. Le lien étroit entre les fonctions elliptiques et les courbes planes cubiques (c'est-à-dire données par une équation du troisième degré) joue un rôle absolument capital dans tous les travaux qui ont conduit à la solution du problème de Fermat.

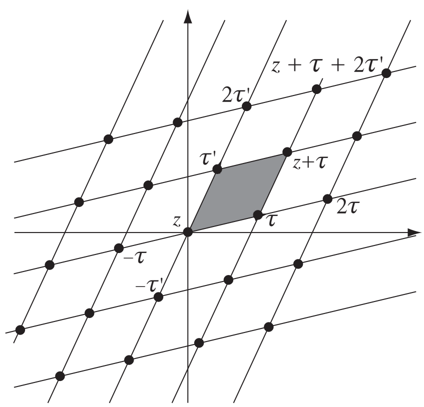
Une fonction elliptique est une fonction méromorphe *f* définie sur $\mathbb{C}$ pour laquelle il existe deux nombres complexes non nuls *a* et *b* tels que *a*/*b* ne soit pas réel et pour tout z dans $\mathbb{C}$:

$$f(z+\tau) = f(z+\tau') = f(z)$$

De cela, il suit que :

pour tout z dans $\mathbb{C}$ et tous entiers naturels m et n :

$$f(z+m\tau+n\tau') = f(z)$$



$f(z) = f(z+\tau+2\tau') = f(z+m\tau+n\tau')$

Les fonctions elliptiques permettent par exemple de paramétrer le mouvement du pendule simple, et servent ainsi à une démonstration conceptuelle du « grand » théorème de Poncelet. Si leur force est dans leur universalité, elles permettent aussi de paramétrer les courbes cubiques planes et de remplacer la condition d'alignement de trois points par une simple addition.

On lui doit la découverte de l'un des résultats les plus fondamentaux de la théorie des nombres, la loi de réciprocité quadratique, dès 1795. Sa démonstration était toutefois « trouée » et ne fut terminée que par Gauss (qui tint à en donner sept démonstrations différentes et l'appela le joyau de l'arithmétique). Voici ce que dit cette loi : si p, q sont deux nombres entiers, on divise d'abord p par q, c'est-à-dire on écrit $p = xq + r$, où r est compris entre 0 et q -1. On définit alors le symbole de Legendre (p/q) comme valant $+1$ ou -1 selon que l'on peut ou non trouver un entier z tel que $z^2 - p$ soit divisible par q. Alors on obtient cette mirifique formule, en fait très complexe :

Pour toute paire (p,q) d'entiers premiers, impairs et distincts,
on a : $(p/q)(q/p) = (-1)^{(p-1)(q-1)/4}$

Cette loi, et ses nombreux avatars, reste encore aujourd'hui au cœur de la théorie des nombres. Legendre conjecture aussi un théorème sur la décomposition des nombres en somme de trois carrés.

Autre théorème profond qu'il énonce mais ne parvient pas à démontrer : le célèbre et spectaculaire théorème de Dirichlet qui affirme que, dans toute série arithmétique, il existe une infinité de nombres premiers. Précisons : dans toute suite dite arithmétique $\{a + bn\}$, c'est-à-dire l'ensemble des nombres entiers de la forme $a + bn$ (où a et b, sont des nombres entiers premiers entre eux), où n parcourt tous les entiers (jusqu'à l'infini), on peut trouver une infinité de nombres premiers.

Géomètre, il corrige des erreurs de Monge en théorie des surfaces *minima*. Chargé par la Convention de diverses opérations de géodésie, il travaille à la triangulation de la France, ce pourquoi il calcule la célèbre correction de Legendre, qui estime la différence qu'il faut appliquer aux angles d'un triangle sphérique comme s'il était en fait un triangle du plan. Gauss est célèbre pour avoir raffiné son étude de la différence des angles entre triangles géodésiques et triangles sphériques lorsque la surface de la terre est considérée, non pas comme vraiment sphérique, mais comme celle d'un ellipsoïde de révolution (aplati). Toujours pour des raisons de géodésie, il est le premier, juste avant Gauss, à publier la fameuse méthode des moindres carrés. La querelle avec Gauss est décrite en détail dans Gray (2002, p.13).

Le nom de Legendre est attaché à celui des polynômes appelés aujourd'hui encore polynômes de Legendre. Ils servent de façon essentielle en algèbre, mais aussi en une très belle interprétation géométrique et physique : si l'on considère l'équation des ondes, ou de la chaleur, sur la sphère, tout mouvement (par exemple les marées en première approximation, car les océans représentent une grande partie de la surface de la planète) se décompose, selon la théorie de Fourier, en fonctions élémentaires. Toutes ces fonctions peuvent se déduire par des rotations appropriées de celles de ces fonctions qui ne dépendent que de la latitude. Elles correspondent exactement aux polynômes de Legendre, quand on prend comme variable la distance au pôle nord. On en trouvera un exposé élémentaire dans Berger (2003).

Les polynômes de Legendre $P_l(u)$ servent à résoudre l'équation de Laplace en coordonnées sphériques pour des fonctions ne dépendant que de la latitude, c'est-à-dire que l'on cherche les λ et les f tels que $\Delta f = \lambda f$. Ce sont des polynômes de degré l, définis sur l'intervalle $[-1,+1]$ et qui vérifient :

$$\frac{1}{(1-2hu+h^2)^{\frac{1}{2}}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(u)\, h^l$$

$$P_l(u) = \frac{1}{2^l\, l!}\frac{d^l}{du^l}(u^2-1)^l$$

Ce sont les polynômes qui apparaissent dans le développement en série de l'équation différentielle du second ordre, dite équation de Legendre :

$$(1-u^2)\,P''_l(u) - 2u\,P'_l(u) + l(l+1)P_l(u) = 0$$

Ils satisfont les relations de récurrence :

$$(l+1)\,P_{l+1}(u) = (2l-1)\,uP_l(u) - lP_{l-1}(u)$$
$$(l-u^2)\,P'_l(u) = -\,luP_l(u) + lP_{l-1}(u)$$

et sont normalisés en sorte que :

$$\int_{-1}^{1} P_l(u)P_m(u)\mathrm{d}u = \frac{2}{2l+1}\delta_{lm}$$

Les premiers polynômes de Legendre sont :

$$P_0(u) = 1$$
$$P_1(u) = u$$
$$P_2(u) = \frac{1}{2}(3u^2-1)$$
$$P_3(u) = \frac{1}{2}(5u^3-3u)$$

Également astronome, Legendre utilise la méthode des moindres carrés pour l'étude statistique de la trajectoire des comètes (1806) ou pour ses travaux de géodésie.

Œuvres : *Éléments de géométrie*
Essai sur la théorie des nombres
Exercices de calcul intégral
Traité des fonctions elliptiques

Probabiliste, précurseur de la sociologie, homme politique, ***Marie Jean Antoine Nicolas de Caritat Condorcet*** (Ribemont 1743, Bourg-la-Reine 1794) épouse en 1786 Sophie de Grouchy, la sœur du célèbre maréchal que Napoléon attendra en vain à Waterloo. Le plus ardent en politique révolutionnaire de tous les mathématiciens mentionnés dans cette section, il est triste de constater qu'il fut le seul à y laisser la vie : il se suicida dans sa prison (ce fut à tout le moins la thèse officielle !). Sa capture est célèbre : après s'être caché dans les bois de Clamart, mourant de faim, il entre dans une auberge et y commande une omelette de plusieurs œufs, qu'il paye avec une pièce d'or, signature d'un aristocrate. Pire : il a sur lui un livre de poésies d'Horace. La rue Condorcet existe toujours, à cet endroit précis, dans la banlieue de Paris, à Clamart. On pourra lire, sur Condorcet et la Terreur, le chapitre intitulé « L'omelette de Condorcet » dans Finkielkraut (1988).

Condorcet est le premier à avoir appliqué le calcul des probabilités aux élections (le paradoxe de Condorcet). Voici ce paradoxe, sous forme simplifiée. Soit trois candidats à une élection : A, B, C. On suppose que chaque électeur a un ordre de préférence : 13 électeurs donnent l'ordre A-B-C, 5 l'ordre A-C-B, 5 l'ordre B-A-C, 12 l'ordre B-C-A, 12 l'ordre C-A-B et 3 l'ordre C-B-A. Alors, en cas de duel entre A et B, A l'emporte 30 à 20 ; en cas de duel entre B et C, B l'emporte 30 à 20 ; en cas de duel entre A et C, C l'emporte 27 à 23. Il n'y a donc aucun moyen de désigner le vainqueur.

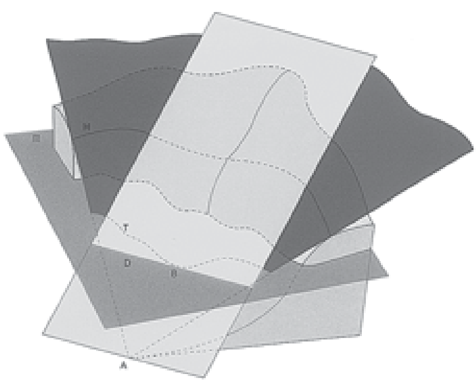
Il est le premier à introduire des arguments scientifiques en sociologie, son but étant « d'étendre l'empire de la raison aux sciences sociales ».

Voici maintenant l'une des figures les plus extraordinaires des mathématiques françaises, certes du fait de ses travaux mais aussi par son influence. De ***Gaspard Monge*** (Roanne 1746, Paris 1818), on peut sans aucun risque affirmer qu'il fut le plus influent des professeurs de toute l'histoire des mathématiques, et ce de tous pays, par ses cours, ses livres, par la fondation de l'École polytechnique enfin (on verra plus bas qu'Henri Cartan partage avec lui un honneur comparable). Monge possède un mélange rare de capacités d'administrateur, de mathématicien imaginatif et d'enseignant communicatif, fascinant ses élèves (nous observerons chez Poncelet les effets de cette fascination). Il participe aussi à la fondation de l'École normale supérieure. Outre les livres d'histoire déjà mentionnés, pour Monge, voir en particulier — avec quelques réserves — Taton (1951).

Chef d'école prodigieux, par ses cours aux deux écoles mentionnées ci-dessus et par ses livres (pratiquement tous les écrivains en géométrie analytique d'alors attribuent leur inspiration à Monge), il est aussi homme politique, signant la condamnation à mort de Louis XVI ; c'est un grand ami (ainsi que Fourier) de Napoléon. Mais il démissionne de son poste de ministre de la Marine, tant il le trouve mal organisé. Surtout, ayant constaté la nécessité urgente de former des cadres pour l'enseignement et pour l'armée, il participe à la fondation, on l'a vu, des deux Grandes Écoles du temps. Il collabore activement à la réforme du système de mesures, donc au système métrique, comme pratiquement tous les mathématiciens de son époque.

Tout jeune apprenti dans une école d'ingénieur (il n'a pas le droit d'être élève, n'étant pas noble), il résout le problème des remblais et des déblais, ce qui le propulse instantanément au rang de professeur. Ce travail longtemps oublié vient de revenir au premier plan aux côtés du calcul des probabilités (transports de tas de sable), tant ses implications économiques, notamment, sont grandes. Ces travaux de Monge ont été repris dans un cadre plus large ; dans cet étonnant texte (Brenier *et alii*, 2003), on applique la méthode de Monge aux équations de la relativité générale et on réussit à faire une étude rétrograde de l'évolution de l'univers. On peut vraiment dire que Monge est l'un des premiers à avoir étudié une discipline aujourd'hui fondamentale, l'optimisation.

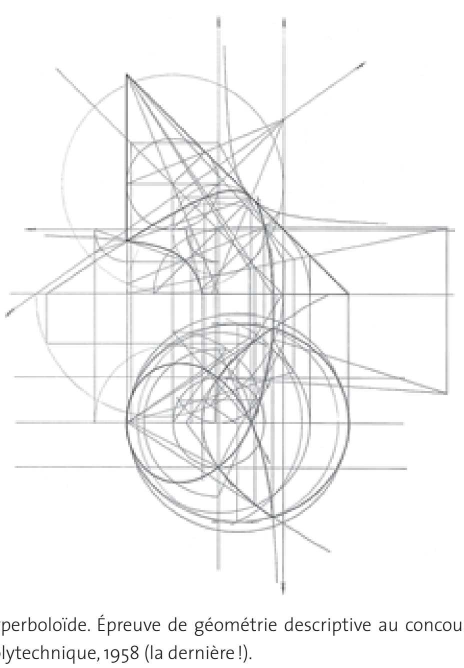
À cette époque encore très imprégnée de militaire, sa prodigieuse vision de l'espace lui permet de résoudre le calcul des défilements, c'est-à-dire de savoir comment tracer les hauteurs des fortifications pour mettre les défenseurs de la place à l'abri des tirs ennemis.



Défiler une fortification, c'est élever son enceinte en sorte que l'intérieur soit protégé des regards et des tirs tendus de l'ennemi. Si la fortification est bâtie sur un terrain plat, le défilement ne présente aucune difficulté. En terrain accidenté, le problème est plus délicat. La méthode de Monge pour défiler un point A consiste à construire le plan du site, c'est-à-dire un plan tangent au cône dont le sommet est en A et qui s'appuie sur le contour apparent H du terrain vu de ce point. Monge détermine graphiquement sur la carte la trace T du cône sur un plan horizontal π et tire la droite D tangente à T, la plus proche du point A à défiler. Cette tangente B et le point A déterminent le plan du site. Il suffit alors de construire le mur de la fortification sur le plan de ce site, comme en terrain plat.

Il fonde pour cela la géométrie descriptive, seul outil pour la géométrie de l'espace dans les applications pratiques jusqu'à l'arrivée des ordinateurs (qui d'ailleurs ne la remplacent pas complètement). La géométrie descriptive est l'étude de ce qu'il y a à faire pour reconstituer complètement une figure de l'espace à l'aide de deux seulement de ses projections. C'est une chose essentielle en architecture, en construction de bâtiments, etc. Réservée d'abord aux élèves de Polytechnique, étant considérée comme *classifiée*, « secret défense », la géométrie descriptive n'apparut au grand jour que vingt ans après. Avant la CAO (conception assistée par ordinateur, voir pour illustrer la place de la France en ce domaine le logiciel *Catia* de Dassault, utilisé dans le monde entier), la géométrie descriptive est requise pour tous les ingénieurs, surtout les architectes, plus généralement pour toute profession où il faut voir dans l'espace avec seulement des dessins plans. On trouvera plus de renseignements tant techniques qu'historiques dans Asancheyev (2002) et Sakarovitch (1998). Si nos évoquons ce point, c'est que la vision dans l'espace est quelque chose de crucial, en particulier dans le monde actuel.

Pour des observateurs à courte vue, Monge pâtit de n'être associé qu'à la géométrie descriptive, qui ne comporte pas vraiment de mathématiques proprement dites. La géométrie descriptive a été supprimée des concours des Écoles normale et polytechnique en 1958, de l'École centrale en 1962. Mais elle reste aujourd'hui encore enseignée dans les écoles d'architecture, par exemple aux Beaux-Arts de Paris, aux écoles polytechniques fédérales de Zurich et de Lausanne. Les professionnels savent bien que, pour développer une vision dans l'espace, la CAO est quelque chose qui ne vient qu'après un tel développement. Il semble que rien encore ne puisse remplacer la géométrie descriptive pour ce faire (sauf peut-être des jeux comme le Meccano, le Lego ; notez qu'il n'existe pratiquement aucun jeu du type « puzzle » qui soit réellement à trois dimensions).

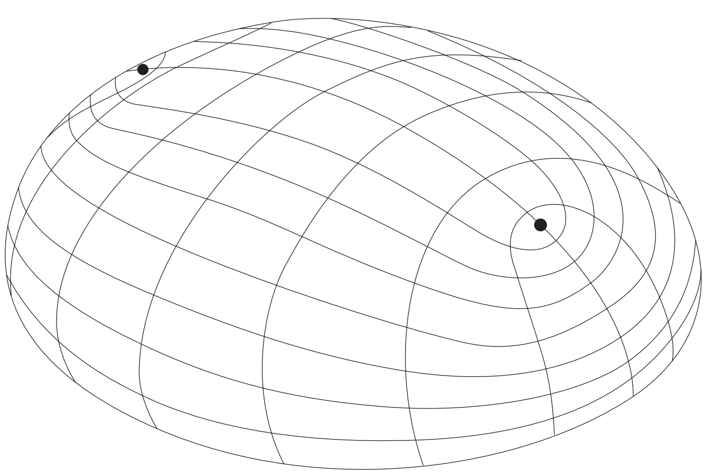


Cône et hyperboloïde. Épreuve de géométrie descriptive au concours d'entrée à L'École polytechnique, 1958 (la dernière !).

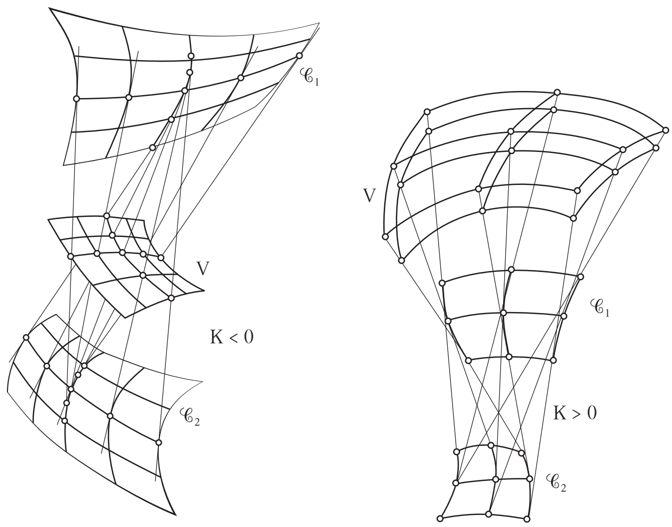
Après Descartes, il est l'un des premiers à avoir ressuscité l'alliance de la géométrie et de l'algèbre ; en particulier, il est le fondateur de la géométrie analytique à trois dimensions, le premier à écrire une droite de l'espace comme définie par les deux équations $z = ax + p$, $y = cx + q$. Il sait aussi trouver la droite perpendiculaire commune à deux droites données par leurs équations.

Citation de Weil (1996) : *« Si l'on considère la géométrie analytique dans les mains de Lagrange, le calcul tensoriel dans celles de Ricci, ou d'autres exemples plus récents, il est absolument clair qu'un traitement purement formel des domaines de la géométrie aurait inéluctablement tué le sujet s'il n'avait été sauvé par des vrais géomètres, Monge par exemple, Levi-Civita et par-dessus tous, Élie Cartan. »*

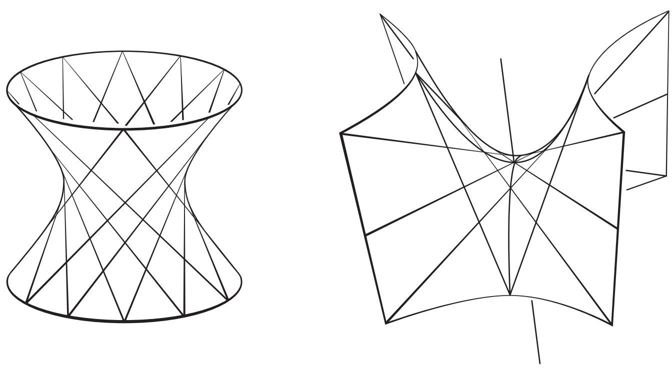
Avec Gauss, c'est le premier géomètre sérieux de la théorie des surfaces ; avant eux, le XVIIe siècle restait celui des courbes. Il découvre entre autres la notion de ligne de courbure d'une surface. Et « démontre » surtout la figure que forment les normales à une surface le long d'une ligne de courbure, ce qui est devenu fondamental en optique (tant géométrique qu'industrielle). Pour les surfaces particulières que sont les quadriques (la généralisation à l'espace de courbes planes appelées coniques), il a étudié les génératrices rectilignes, c'est-à-dire les deux familles de droites que contiennent certaines de ces quadriques : les hyperboloïdes et les paraboloïdes. On lui doit d'ailleurs ces noms d'ellipsoïde, paraboloïde, hyperboloïde. Comme l'a dit Dieudonné, Monge inaugure bel et bien « l'âge d'or de la géométrie », de 1795 à 1850.



Les lignes de courbure d'un ellipsoïde.



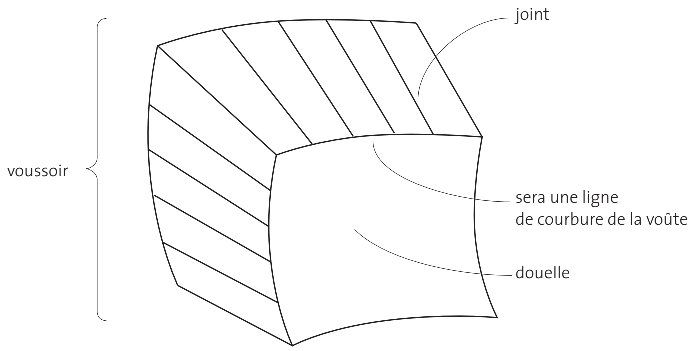
Comment s'organisent les normales le long des lignes de courbure.



Les génératrices d'un hyperboloïde. Ces génératrices sont utilisées, entre autres, pour une double armature dans le béton de certains bâtiments : châteaux d'eau, etc.

Mais, toujours en théorie des surfaces, il introduit aussi l'analyse et, surtout, l'équation aux dérivées partielles (EDP) dite « de Monge-Ampère », capitale dans la théorie des EDP en général. Lagrange disait de lui : « Avec ses applications de l'analyse à la géométrie, ce diable d'homme va se rendre immortel. » Cela ne l'empêcha pas de se tromper dans l'équation des surfaces *minima*, l'équation correcte étant due à Legendre. Concernant les EDP, il est aussi le premier à introduire la notion, incontournable aujourd'hui, de bande caractéristique, notion qui va dominer aujourd'hui toute la matière (équation des ondes, de la chaleur, etc.). Ces choses furent ensuite précisées par Cauchy, et bien plus tard par Élie Cartan. On retrouve cette équation dans le problème, mentionné plus haut, des « déblais-remblais » ; bien que très techniques, les articles de Brenier (1991)

et de Brenier *et alii* (1993) montrent quels sont les nombreux apports prophétiques de Monge. Pour ce dernier, comme pour Laplace ou Leray, les mathématiques effectuent un va-et-vient constant entre théorie, calculs et applications.



Monge démontre que les pierres à tailler pour constituer une voûte (dans le cas non banal où la voûte n'est pas une portion de sphère) doivent être découpées en suivant les lignes de courbure de la surface à voûter.

L'étude des lignes de courbure des ellipsoïdes enthousiasma tellement Monge qu'il imagina une pièce avec voûte et deux lustres aux points marqués (appelés ombilics) ; voici ce qu'il en écrivit : « Enfin deux lustres suspendus aux ombilics de la voûte, et à la suspension desquels la voûte semblerait concourir, serviraient à éclairer la salle pendant la nuit. Nous n'entrerons pas dans de plus grands détails à cet égard ; il nous suffit d'avoir indiqué aux artistes un objet simple, et dont la décoration, quoique très riche, pourrait n'avoir rien d'arbitraire, puisqu'elle consisterait principalement à dévoiler à tous les yeux une ordonnance très gracieuse, qui est dans la nature même de cet objet. »

Jean-Baptiste Joseph Fourier (Auxerre 1768, Paris 1830) est le créateur de la physique mathématique. Il a une carrière mouvementée : apprenti moine bénédictin, puis étudiant en 1794 à l'École normale supérieure, il est dès l'année suivante professeur à Polytechnique. Il participe très activement, en 1798, à l'expédition d'Égypte [voir les détails de cette fantastique histoire dans Dhombres et Robert (1998)], est nommé préfet de l'Isère ; il fait assécher les marais de Bourguoin, trace la route Grenoble-Briançon par le col du Lautaret et développe la vie culturelle de la capitale du Dauphiné. Après un bref passage comme préfet du Rhône, il rentre à Paris et se consacre désormais à la vie scientifique, la terminant comme secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences.

Tous ces intermèdes administratifs ne l'empêchent pas de poursuivre sans relâche, pour des raisons de physique, la recherche complète des solutions de diverses équations, notamment celle qui fournit la répartition de la chaleur dans tel ou tel corps. C'est pour cela qu'il invente de toutes pièces deux notions, aujourd'hui incontournables tant dans la théorie des EDP que dans de nombreux autres domaines (théorie des nombres, géométrie, physique mathématique) : ce sont les séries de Fourier et la transformation de Fourier. Révolutionnaire est l'idée d'écrire les solutions cherchées pour de telles équations sous forme de séries infinies, voire plus : les coefficients de ces séries sont donnés par des formules intégrales explicites en fonction de la fonction considérée. Il réussit là où Euler, Daniel Bernoulli et d'Alembert avaient échoué. Mais, très prophétiques, ses travaux manquent cependant de rigueur, même s'ils seront confirmés par Dirichlet. Pour le meilleur cadre possible de fonctions auxquelles on peut appliquer la transformation de Fourier, on se reportera à Laurent Schwartz.

L'analyse des fonctions (ne pas oublier qu'en physique, pour observer tout phénomène, pour l'analyser, on doit étudier les signaux qu'il envoie, que l'on reçoit, appelés observables) ne fera des progrès, par rapport aux séries et à la transformation de Fourier, que tout récemment avec la théorie des ondelettes. C'est le moment de signaler que, outre le gros ouvrage de Dhombres et Robert (1998), une lecture plus facile fournit de nombreux renseignements, très accessibles aux non-spécialistes, sur les séries, la transformation de Fourier, y compris la « rapide », à savoir Burke Hubbard (1995).

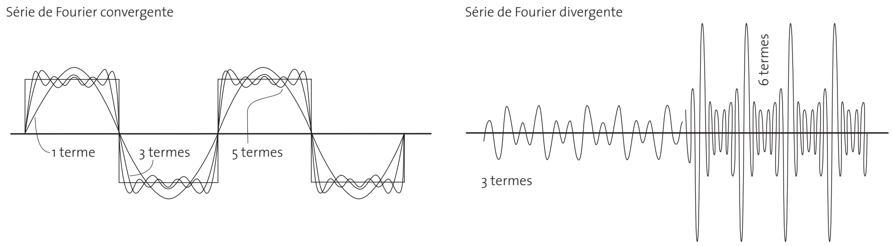
Une fonction de période 2π est développable en série de Fourier s'il existe des suites (a_n) et (b_n) telles que, pour tout réel x :

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Les scalaires a_n et b_n sont les coefficients de Fourier de la fonction f.

$$a_n = \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx.\mathrm{d}x$$
$$b_n = \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx.\mathrm{d}x$$

Formules pour les séries de Fourier.



$f(x)=\sin x+1/3\ \sin 3x+1/5\ \sin 5x+\ldots$

$g(x)=\sin x+3\ \sin 3x+5\ \sin 5x$
$+7\ \sin 7x+9\ \sin 9x+11\ \sin 11x+\ldots$

Les séries de Fourier peuvent très bien converger vers la fonction analysée, ou connaître des « ennuis ». L'étude des ennuis possibles a été l'un des grands problèmes de l'analyse, un des « coups » finaux lui ayant été asséné par Malliavin. Ici, les choses se passent bien pour la fonction de gauche, mais très mal pour celle de droite.

Parlez maintenant à un physicien d'un problème que vous ne savez pas résoudre, il vous dira : « Prends la transformation de Fourier ! » (dite, en argot courant, « transfourier »). C'est une opération tellement importante dans de nombreux domaines des mathématiques, de la physique et de toutes les sciences que l'une des découvertes récentes les plus importantes de calcul sur ordinateur est l'algorithme, et ses variantes, appelé transformation de Fourier rapide (nous en avons parlé dans la partie *Ondelettes déferlantes sur l'analyse* de la section I c). Vous utilisez tous les jours la transformation de Fourier, car c'est elle qui transforme les émissions radio et autres, de la modulation d'amplitude à la modulation de fréquence, et leur permet ainsi d'éliminer pratiquement tous les parasites. C'est essentiel de savoir *inverser* cette transformation, toujours par des formules d'une grande simplicité :

f étant une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ intégrable sur $\mathbb{R}$, la *transformée de Fourier* de f est la fonction $\widehat{f}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}t$$

Si la fonction f et sa transformée de Fourier $\widehat{f}$ sont continues et intégrables sur $\mathbb{R}$, on a, pour tout nombre réel x:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}t$$

Transformée de Fourier et la formule d'inversion.

Le livre de Dhombres et de Robert (1998), énorme travail et cependant de lecture incroyablement agréable, constituera désormais la bible incontournable sur Fourier. On en trouvera une analyse enthousiaste, que nous partageons, dans Kahane (2003).

Même si Ramanujan (1887–1920) et Pascal furent d'incomparables mathématiciens durant une courte période de leur vie, ***Évariste Galois*** (Bourg-la-Reine 1811, Paris 1832) reste un phénomène toujours unique et ahurissant dans l'histoire des mathématiques mondiales. En moins de six ans, ce superbe et fulgurant génie met sur pied la théorie qui permet aujourd'hui de comprendre complètement les équations algébriques et les points de départ de la théorie abstraite des groupes. Ses deux contributions font partie du corpus de base de toute l'algèbre. Sa vie extrêmement mouvementée, tant scolairement que politiquement (à cause de son caractère doublé d'un courage politique certain), ressemble fortement à un roman. Mais les choses se passèrent pourtant ainsi ; lire le numéro spécial de la revue *Pour la science* consacré à Galois, dans sa série « Les génies de la science » (Verdier, 2003). Ce texte remarquable vous donnera tous les détails, les citations, pour détailler, préciser le résumé qui suit.

Très brièvement : fils d'un révolutionnaire convaincu, muni d'une solide éducation classique et religieuse par sa mère, il ne va pas à l'école mais entre au collège royal Louis-le-Grand, dont il est vite chassé pour son refus de chanter à la chapelle et celui de porter un toast en l'honneur du roi. Dès 15 ans, il se passionne pour les mathématiques, lit Legendre, Abel et Lagrange. Mais, par trop prophétique, il est refusé deux fois au concours de Polytechnique. On ne sait d'ailleurs rien de ces oraux, sinon des légendes peu fondées. Il entre en 1828 à l'École normale supérieure, publiant déjà des résultats sur les fractions continues. Enfermé dans cette école avec ses condisciples par le directeur qui voulait les empêcher de participer aux combats de rue de l'époque, il proteste et en est renvoyé. Antiroyaliste, il est même emprisonné quelques mois. Il meurt dans un duel ; la légende voudrait qu'il ait été provoqué pour des raisons politiques, mais cela reste à prouver. Jusque sur son lit de mort, il refuse l'extrême-onction. Ses travaux mirent longtemps à voir le jour, ses rédactions étant extrêmement denses. Il fallut attendre 1846 pour la publication de ses œuvres, et bien plus tard encore pour une explication complète, sous les plumes de Serret et de Jordan. Galois est le Rimbaud des mathématiques.

Citons Picard en 1897 : *« Je ne me risquerai pas à des comparaisons périlleuses ; Galois a sans doute des égaux parmi les mathématiciens de ce siècle ; aucun ne le surpasse par l'originalité et la profondeur de ses conceptions. »*

Voici en quelques lignes ce que furent ses principales contributions. Il bâtit de toutes pièces ce qui est appelé aujourd'hui théorie de Galois, à savoir attacher à toute équation algébrique un groupe qui la caractérise, et en particulier permet de savoir, question majeure qui hanta tous ses prédécesseurs, si cette équation peut être résolue par des formules explicites (comprenant seulement des racines, carrées ou plus élevées). Ce groupe autopsie en quelque sorte l'équation, en exhibant toutes ses symétries.

Pour mener cette tâche à bien, il lui faut développer les bases de ce qui est aujourd'hui la théorie des groupes abstraits : notions de sous-groupe distingué, de groupe quotient, de groupe simple, d'isomorphisme de groupe.

o	Id	s_1	s_2	t_1	t_2	t_3
Id	Id	s_1	s_2	t_1	t_2	t_3
s_1	s_1	s_2	Id	t_3	t_1	t_2
s_2	s_2	Id	s_1	t_2	t_3	t_1
t_1	t_1	t_2	t_3	Id	s_1	s_2
t_2	t_2	t_3	t_1	s_2	Id	s_1
t_3	t_3	t_1	t_2	s_1	s_2	Id

A_3

o	Id	s_1	s_2
Id	Id	s_1	s_2
s_1	s_1	s_2	Id
s_2	s_2	Id	s_1

o	Id
Id	Id

Le groupe S_3 des permutations des trois solutions d'une équation de degré 3 se décompose en deux « blocs », l'un ne contenant que les permutations Id, s_1 et s_2, et l'autre contenant les transpositions t_1, t_2 et t_3. D'après la table, l'ensemble $\{Id, s_1, s_2\}$ est un sous-groupe de S_3, car toute composition de deux de ses éléments donne un de ses éléments : c'est le sous-groupe des permutations paires A_3. Ce sous-groupe est lui-même divisé en trois « blocs », l'un constitué des éléments Id, l'autre des éléments s_1 et le troisième des éléments s_2. Parmi ces sous-blocs, la substitution Id constitue le seul sous-groupe de A_3. D'après la théorie de Galois, cette réduction progressive du groupe S_3 correspond aux différentes étapes de résolution de l'équation du troisième degré : recherche et résolution de l'équation auxiliaire.

Précisons qu' il est le premier à construire systématiquement des corps finis, dits aujourd'hui corps de Galois (un corps est un objet abstrait, mais qui a les mêmes propriétés d'addition et de multiplication que les nombres rationnels ou les nombres réels, ou encore les nombres complexes ou les quaternions).

Il est important de saisir, et c'est d'ailleurs bien décrit dans le numéro de *Pour la science* dédié à Galois, que non seulement sa théorie rend compte de toutes les équations algébriques, mais que c'est un modèle type pour tout un ensemble de théories algébriques ainsi que pour de nombreux objets d'analyse et de géométrie qui jalonnent toutes les mathématiques actuelles, Picard ne s'y étant pas trompé. Il reste que les plus grands génies peuvent se tromper, surtout hors de leur spécialité : ainsi, Galois n'hésite pas à dire que « toute fonction continue est dérivable ».

Mathématicien très complet, ayant une œuvre fondamentale en algèbre, en analyse, en géométrie, ***Augustin-Louis Cauchy*** (Paris 1789, Sceaux 1857) est surtout connu pour les fondations de la rigueur en analyse, la notion de limite notamment, et la théorie des fonctions holomorphes qu'il fonda de toutes pièces. Il était aussi intransigeant dans ses convictions politiques et religieuses qu'il l'était dans sa conception de la rigueur en mathématiques. Il fonda, grâce à l'outil puissant qu'est l'intégrale de Cauchy et grâce au merveilleux « théorème de Turin », la théorie de la variable complexe qui ouvrit un champ nouveau aux mathématiques. Il forme avec Gauss la première classe de mathématiciens modernes.

Fuyant la Terreur, la famille Cauchy s'installe à Arcueil, où le jeune Augustin-Louis rencontre Laplace et Berthollet (le chimiste). Brillant élève, il entre à seize ans à l'École polytechnique. Il devient ingénieur militaire et travaille de 1810 à 1813, lors du blocus, aux fortifications du port de Cherbourg. Cela ne l'empêche pas de s'intéresser aux mathématiques, et il a des échanges épistolaires avec Lagrange sur le nombre de côtés, de faces et de sommets d'un polyèdre. À son retour à Paris, celui-ci l'encourage à se consacrer aux mathématiques. En 1816, il obtient un poste de professeur à la faculté des sciences de Paris, à l'École polytechnique et au Collège de France. La même année, il entre à l'Académie des sciences où il remplace Monge, évincé pour des raisons politiques.

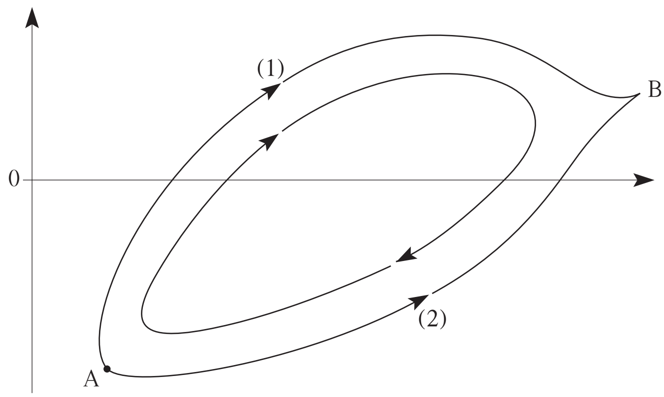
Légitimiste convaincu (il est fait baron par Charles X), Cauchy refuse de prêter serment d'allégeance à Louis-Philippe et s'exile en 1830. Une chaire de mathématique est créée spécialement pour lui à l'université de Turin, ville qui abrita, on s'en rappelle, les débuts de Lagrange. Il la quitte en 1833 pour s'occuper de l'éducation du comte de Chambord, prétendant légitimiste au trône et exilé à Prague. C'est un exil doré, tout comme celui de Viète, comparé à ceux de Poncelet, de Weil, de Leray. Il rentre en France en 1833, lorsqu'on le dispense de son serment d'allégeance. Il retrouve alors son poste à l'École polytechnique. Son caractère agressif pour défendre ses idées bigotes irrite souvent ses collègues !

Dans son histoire des mathématiques, Boyer intitule un chapitre « The time of Gauss and Cauchy ». Mais Cauchy publiait immédiatement ses travaux, contrairement à Gauss qui les laissait longtemps mûrir pour qu'ils soient menés à terme : *pauca, sed matura*. On a vu plus haut, avec Legendre, les drames que cela pouvait produire.

L'histoire des relations entre Cauchy et Abel, Galois et Poncelet, est difficile. Au vu des études récentes, Cauchy reconnaît vite l'importance des travaux de Galois ; pour Poncelet, ses critiques sur la rigueur de ce grand géomètre, très intuitif, étaient justifiées ; encore qu'une parution immédiate aurait peut-être changé pas mal de choses dans la vie de Poncelet. Concernant Abel, il est difficile de savoir s'il ne lut pas les textes de ce dernier parce qu'il les avait égarés sur son bureau, ayant trop de choses à faire, ou de façon délibérée, ou bien parce qu'il ne comprit pas de suite leur importance. Pour Abel, voir les détails dans Stubhaug (2004), qui fourmille d'informations sur la vie mathématique à Paris à l'époque du séjour d'Abel. Pour plus de détails sur Cauchy, sa vie comme son œuvre, voir Thuillier (1996). Voir aussi Dahan Dalmedico, Chabert *et alii* (1992).

Cauchy domine toute l'analyse de la première moitié du XIXe siècle, avant que le flambeau ne passe en Angleterre et en Allemagne, avec, entre autres, Weierstrass, Dedekind, Dirichlet. Il est surtout connu pour sa création géniale et radicalement nouvelle : la théorie des fonctions holomorphes, et les nombreux théorèmes qu'il établit pour ces fonctions. On retrouve les fonctions holomorphes dans de multiples domaines de la science, en physique spécialement ; elles sont devenues le B-A-BA d'un électricien, d'un chauffagiste, d'un constructeur d'avions. Expliquons brièvement pourquoi : le résultat de base (qui n'appartient certes pas à Cauchy et dont la première démonstration complète ne date que des années 1900) est celui de la représentation conforme : ce théorème affirme que tout domaine du plan, de forme absolument quelconque, peut être appliqué sur un disque par une application holomorphe.

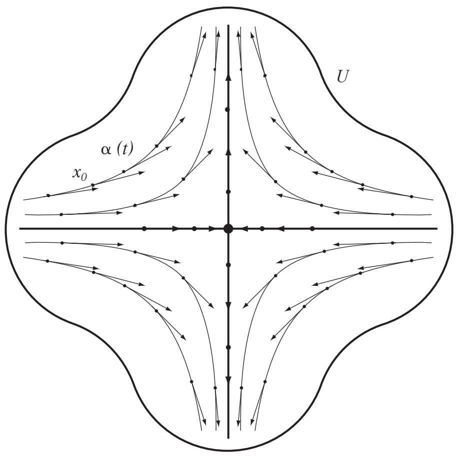
Dans la théorie de Cauchy, au moins deux résultats sont capitaux : les équations de Cauchy (dites de Cauchy-Riemann) et le fait que l'intégrale d'une fonction holomorphe ne dépend pas du chemin choisi, seulement de ses extrémités (s'il y a des ennuis à l'intérieur, on peut alors les évaluer, c'est le fameux calcul des résidus). L'on peut dire que « l'œuvre de Cauchy contenait en germe à la fois la conception géométrique de Riemann et la conception arithmétique de Weierstrass ».



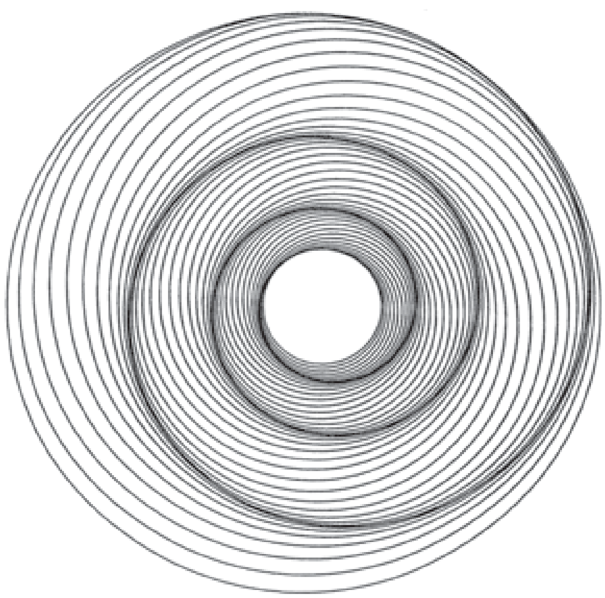
Le théorème de Cauchy stipule que pour les fonctions $f(z)$ de la variable complexe z holomorphe, l'intégrale le long d'un chemin reliant les points A et B est indépendante du chemin reliant A à B. Ainsi, la valeur de l'intégrale est la même selon le chemin (1) et le chemin (2). On en déduit que l'intégrale de la fonction le long d'un chemin fermé, $(1) - (2)$ par exemple, est nulle. Ce théorème n'est applicable que si la fonction $f(z)$ est dérivable dans le domaine du plan complexe où sont pris les chemins : on dit que la fonction est holomorphe. Cauchy a démontré d'abord ce théorème en 1814, dans une forme assez fruste, pour des chemins parallèles aux axes et l'a généralisé à des chemins quelconques en 1825. C'est en 1831 qu'il considère pour la première fois des chemins fermés quelconques.

Cauchy est le premier à fonder solidement l'analyse de différents concepts mathématiques, pour commencer la notion de fonction continue, celle de limite d'une suite de nombres, celle d'intégrale d'une fonction. Le critère de Cauchy figure au début de tout livre d'analyse. Le principe de Cauchy fournit la plus féconde des définitions proposées dans la deuxième moitié du XIXe siècle pour la notion de nombre réel.

Toujours en analyse, il est le premier à démontrer rigoureusement l'existence de solutions pour les équations différentielles ordinaires (ODE), mais aussi pour les équations aux dérivées partielles (EDP), à propos desquelles l'on parle encore de données de Cauchy. On lui doit aussi le théorème des fonctions implicites (l'un des plus utiles de toute l'analyse et de la géométrie différentielle, il figure dans l'enseignement dès les premières années : écrire $F(x,y)=0$ (voir détails ci-dessous)). On lui doit le célèbre exemple $\exp(-1/x^2)$ d'une fonction qui n'est pas égale à sa série de Taylor (malgré sa simplicité, c'est un exemple important. Cette fonction fait également partie du bagage des étudiants de première année d'université !).



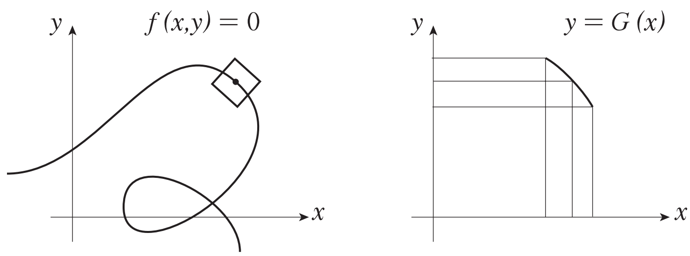
Le théorème d'existence des ODE s'interprète, dans un cas particulier, géométriquement comme le fait que tout champ de vecteurs du plan admet des trajectoires intégrales.



Cauchy démontre rigoureusement ce qui se « voit » sur cette figure (dessinée ici d'après celle d'Étienne Ghys) ; un champ de vecteurs (suffisamment doux) admet toujours des courbes intégrales (dont la tangente en chaque point est le vecteur assigné en ce point). En outre, cette courbe est unique quand l'origine est fixée. C'est évidemment essentiel en mécanique, etc. Mais Cauchy avait besoin de la différentiabilité du champ de vecteurs, la continuité (douceur primaire) ne suffisant pas, comme le montre la figure formée par les cercles osculateurs à une courbe : si l'on considère le champ de vecteurs formé par toutes les tangentes à tous ces cercles, en un point, on a le choix pour la trajectoire : ou suivre le cercle, ou suivre la courbe. C'est Picard qui saura démontrer des théorèmes plus généraux en les insérant dans un cadre plus vaste, par la méthode des approximations successives.

Cauchy est le premier à démontrer rigoureusement que l'on peut réduire les fonctions de deux variables à celles d'une seule. Précisément :

> Si $f(x,y)=0$, on peut toujours (au moins localement) réécrire cela comme $y=\mathrm{G}(x)$, en sorte que $f(x,\mathrm{G}(x))=0$, pour tout x s'entend.



Fonctions implicites. $f(x,y)=0$, $y=G(x)$ telle que $f(x,\mathrm{G}(x))=0$. En chaque point, mais à condition de se restreindre à un petit morceau, toute courbe donnée par une équation « implicite » peut être écrite simplement comme le dessin, le graphe, d'une fonction ordinaire.

En analyse encore, il pose les premiers fondements d'une théorie rigoureuse de l'intégration qui sera achevée par Lebesgue. C'est lui qui fait adopter définitivement la notation actuelle (proposée par Fourier) :

> $\int_a^b f(x)\,dx$ au lieu de la notation $\int f(x)\,dx \begin{bmatrix} x = b \\ x = a \end{bmatrix}$
> très incommode, employée par Euler.

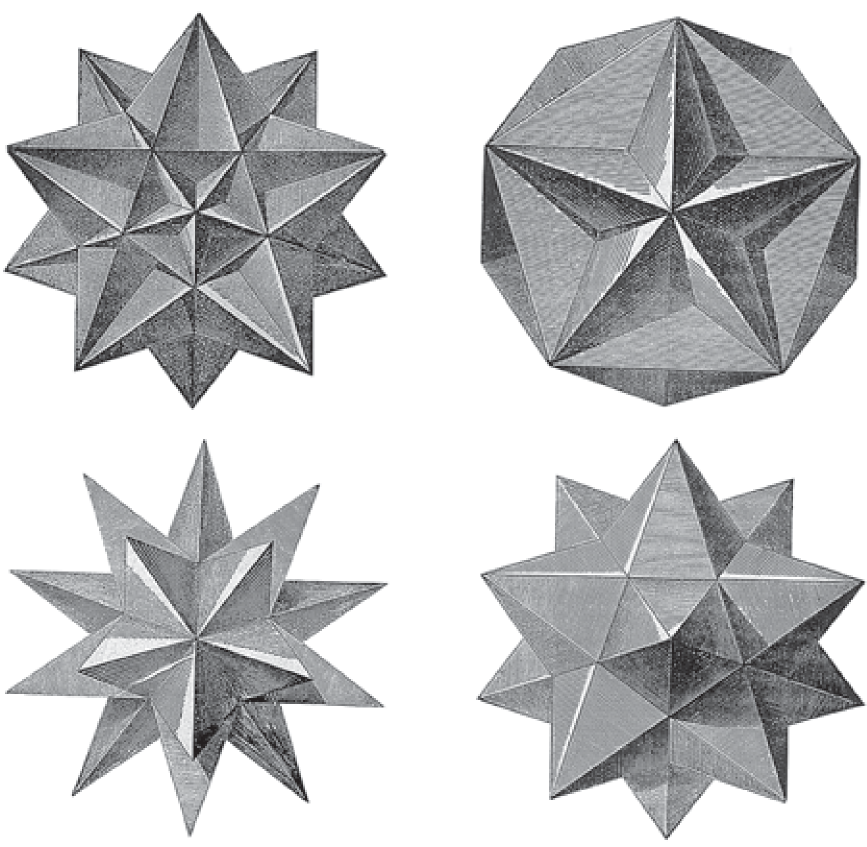
En algèbre, Cauchy livre le premier une théorie des déterminants, systématique et presque moderne, en utilisant la notation en tableau et la double indexation. Cependant, la notion de matrice n'est pas encore complètement claire chez lui. Il démontre toutefois que toutes les matrices symétriques ont leurs valeurs propres réelles, donc que toutes les formes quadratiques sont diagonalisables. On le savait déjà pour les matrices 3×3, même si Euler ne pouvait pas le prouver ; Cauchy le fait en outre pour toutes les dimensions. Tant en algèbre qu'en géométrie, en théorie qu'en application, c'est fondamental. Il montre l'invariance des valeurs propres par similitude, c'est-à-dire essentiellement l'invariance par changement d'axes rectangulaires. Pour en finir avec l'algèbre, précisons qu'il est parmi les premiers à travailler avec des groupes abstraits.

Toute matrice symétrique $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} = \mathrm{A}$

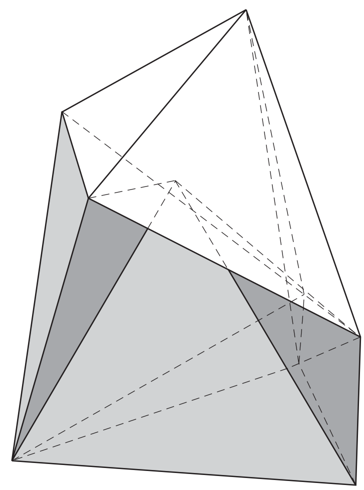
peut se transformer, en changeant de coordonnées, en :

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

Géomètre, on lui doit le célèbre théorème de la rigidité des polyèdres convexes. Notons que la rigidité avait été énoncée par Lagrange, mais pas du tout démontrée. Même aujourd'hui, la démonstration en reste subtile. Le théorème du soufflet pour les polyèdres (non convexes) flexibles ne date que de 1999 : leur volume reste constant dans la déformation.



En 1809, Poinsot découvre quatre polyèdres réguliers mais étoilés (donc pas convexes). Cauchy démontre rapidement qu'il n'en existe pas d'autres.



L'on sait seulement depuis 1999 que le volume d'un tel polyèdre flexible reste constant. C'est le théorème dit du soufflet.

On n'oubliera pas qu'il publia des travaux en astronomie ; c'est aussi lui qui donna les bases mathématiques de la théorie de l'élasticité. Et il écrivit aussi un mémoire sur l'équation des ondes.

Bien que n'ayant pas la stature des précédents, ***Joseph Liouville*** (Saint-Omer 1809, Paris 1882) peut être crédité de contributions majeures en géométrie, algèbre, théorie des nombres, analyse et mécanique rationnelle. Sa carrière est aussi classique que les carrières actuelles : il est élève puis répétiteur, professeur à Polytechnique, entre à l'Académie des sciences avant 30 ans, et enfin au Collège de France en 1851. Nous verrons plus bas que Poncelet, quant à lui, ne put avoir accès à une carrière classique et en souffrit énormément.

Liouville est le premier à construire implicitement des nombres transcendants (comme sommes de séries adéquates) : un nombre est dit transcendant quand on ne peut jamais trouver un polynôme à coefficient de nombres tous entiers dont il soit une racine. Il faudra attendre Hermite pour prouver que le nombre classique e est transcendant.

Il est l'initiateur, avec Sturm, de la théorie des ODE périodiques. Le théorème dit pour toujours de Liouville énonce qu'une fonction holomorphe bornée dans tout le plan est nécessairement triviale, donc constante. Ce théorème est devenu lui aussi d'un usage constant.

On lui doit l'un des plus beaux théorèmes de la géométrie, facile à énoncer mais difficile à démontrer (combien de géomètres ont tenté d'en donner leur propre démonstration !) : même sur un tout petit morceau d'espace, les transformations qui conservent les angles sont bien connues et ne dépendent que d'un

nombre fini de paramètres, qui sont des produits d'inversions (les inversions sont les transformations qui préservent l'ensemble des sphères de l'espace). Tout ceci est faux dans le plan, où toute fonction holomorphe préserve les angles (mais pas les cercles, en général).

Il a une grande influence dans la publication mathématique comme fondateur du *Journal de mathématiques pures et appliquées*, en 1836, appelé depuis par les connaisseurs : « Journal de Liouville » (voir la liste des journaux mathématiques français tout à la fin de ce livre).

Géomètre, ingénieur, général commandant l'École polytechnique, homme de foi, ***Jean-Victor Poncelet*** (Metz 1788, Paris 1867) est le père fondateur de la géométrie projective, entrevue seulement par Desargues, et, à la suite de Monge, l'acteur principal et fervent, voire agressif, du renouveau de la géométrie pure à son époque. Outre l'article dû à René Taton (dans Gillespie, 1970–1981), on trouvera dans Belhoste (1998) et Chatzis (1998) une analyse récente et remarquable, tant de l'œuvre géométrique et mécanique de Poncelet que des détails de sa vie en Russie (on y reviendra). On lira également avec profit le passionnant *Traité* écrit par Poncelet lui-même (1865–1866). Poncelet fut surnommé « le Newton de la mécanique appliquée ». Mais son titre de gloire, que personne ne lui dispute, est sans conteste d'avoir été le « créateur de la géométrie moderne », qu'elle soit projective ou algébrique.

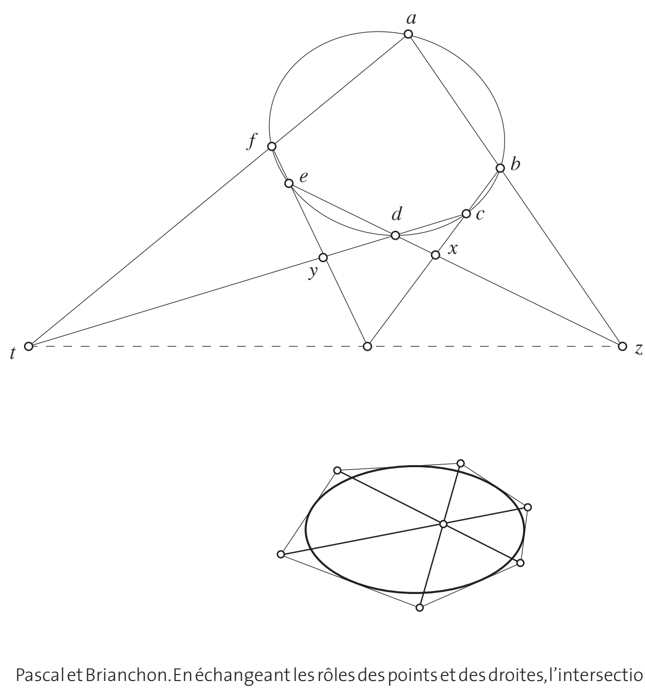
La vie de Poncelet est difficilement imaginable. Élève de Monge à Polytechnique en 1808–1810, il sort de l'École comme capitaine du génie, et est fait prisonnier en novembre 1812 au passage du Dniepr ; sauvé par son uniforme d'officier du génie, pouvant donc être utile pour un *debriefing*, il est emmené en quatre mois de marche forcée à Saratov, sur la Volga [incroyable, sauf peut-être pour les alpinistes de très haut niveau : en haillons et avec un quignon de pain par jour, une température telle que le mercure des thermomètres gèle (moins 45 degrés)], où il demeure deux ans prisonnier. Le printemps le sort de son épuisement, et sa constitution incroyable lui permet, à partir de ses souvenirs des cours de Monge, de poursuivre l'œuvre de Desargues et de fonder véritablement la géométrie projective (il a alors entre 24 et 26 ans). Le tout en captivité ! Poncelet connaît par la suite des problèmes de carrière et de publication. Ses découvertes de prison ne peuvent être complètement publiées qu'en 1864. Auparavant, un manuscrit important soumis à l'Académie a été refusé par Cauchy, ce qui l'affecte beaucoup. Il remanie son texte et le publie à Metz en 1822. Mais ce retard fait qu'une partie de ses résultats sont redécouverts et publiés par d'autres, ce qui le rend assez aigri. Enfin, il souffre indirectement d'avoir accepté un poste de professeur de mécanique à Metz ; car son tempérament dévoué le fait se consacrer entièrement à sa tâche. On lui doit alors de nombreuses inventions de mécanique pratique : pont-levis à poids variable, turbine révolutionnaire. Cette turbine de Poncelet devint célèbre et fut utilisée partout, étant beaucoup plus performante que les moteurs hydrauliques précédents. Il faut se rappeler que, jusqu'en 1860, ces moteurs-turbines hydrauliques étaient encore très utilisés. Poncelet effectue les études théoriques nécessaires pour mettre au point ces turbines : courbure des pales, sens de l'alimentation, etc. Il est également l'un des premiers à considérer l'aspect atomique des corps, pour des problèmes de résistance des matériaux, des voûtes ou des sols (voir Chatzis, 1998).

La révolution de 1848 influe de nouveau sur sa carrière. Il revient à Paris et se remet aux mathématiques, à la rédaction de livres importants tant en mathématiques qu'en mécanique. Décrivons maintenant brièvement son œuvre mathématique.

Pour faire de la géométrie projective, il se place d'emblée non seulement dans l'espace projectif (c'est-à-dire en complétant, comme Desargues, l'espace ordinaire par des points à l'infini, cela pour chaque direction de droite), mais en admettant que tout se passe avec des nombres imaginaires (nombres dits aujourd'hui complexes ; voir Flament (2003) pour leur histoire). Il justifie ces travaux par un premier principe, dit de continuité, qu'établiront rigoureusement les géomètres allemands, beaucoup plus tard ; on parlerait aujourd'hui de prolongement des identités algébriques. C'est bien parce que Poncelet ne manie que des objets, énonçant sur eux des résultats algébriques, que son travail est finalement si solide, quoique pas assez justifié.

La continuité est l'une des trois notions complètement nouvelles et osées que Poncelet introduit. Ce principe dit par exemple que la droite qui joint les deux points d'une courbe devient la tangente à la courbe quand les deux points sont confondus. Mais aussi que les relations métriques que l'on voit quand on coupe un cercle par deux droites (la fameuse notion de « puissance » d'un point par rapport à un cercle) se conservent quand on passe d'une droite coupant le cercle à une droite qui lui est extérieure ! Sa deuxième invention est tout aussi fondamentale, c'est celle de la dualité : dans le plan projectif, on peut en quelque sorte échanger complètement, *mutatis mutandis*, les rôles des points et des droites ; c'est la théorie des polaires réciproques. Cela permet de démontrer, pour le même « prix », deux fois plus de théorèmes ; ainsi du théorème de Pascal, l'on déduit de suite celui de Brianchon. Il est vrai que ce dernier utilisait déjà la transformation par polaires réciproques par rapport aux coniques, comme on le voit dans l'un de ses articles de 1810, qui devait grandement inspirer Poncelet : « Enfin, M. Brianchon a fait insérer dans le 10e cahier du *Journal de l'École polytechnique* un " Mémoire " qui présente, sur ce sujet, des réflexions à la fois neuves et étendues ; je me fais un plaisir et un devoir de reconnaître que je dois l'idée première de mon travail à la lecture de ce récit » (Poncelet, 1865–1866). Troisième et dernière nouveauté : la notion de transformation projective. Pour lui, le cadre projectif complexe est le bon cadre de toute la géométrie. On lui doit la clarification de la notion de « nombres » en géométrie, en particulier grâce à sa distinction très claire entre les propriétés métriques (à la Euclide) et les propriétés projectives des espaces où l'on travaille. Il n'en reste pas moins que Poncelet est intéressé par la géométrie « réelle », les nombres complexes n'étant pour lui qu'un moyen, certes utile. Rappelons ici le fameux proverbe d'Hadamard : « Le plus court chemin entre deux résultats du domaine réel passe souvent par le domaine complexe. »

Pour une analyse plus fine que la nôtre des apports de Monge, Poncelet et Chasles, le texte de Guérindon et Dieudonné (dans Dieudonné, 1978), précisément les pages 81 à 89, nous semble remarquable.

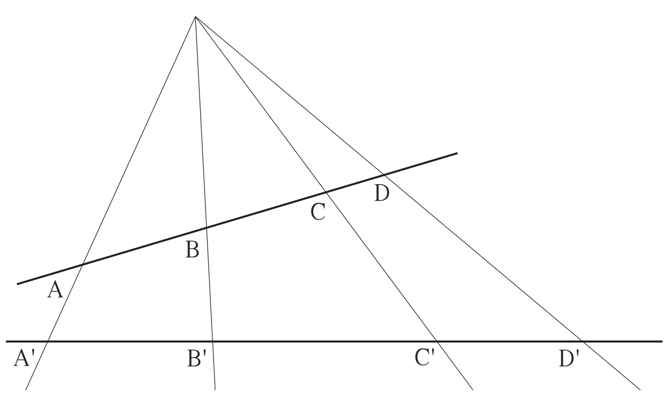


Pascal et Brianchon. En échangeant les rôles des points et des droites, l'intersection de deux droites avec la droite joignant deux points, on déduit de l'hexagone de Pascal le théorème de Brianchon, celui-ci étant difficile à démontrer de façon directe, comme Brianchon s'en est rendu compte.

Une invention révolutionnaire, qui nécessite justement et l'espace projectif et la complexification, est celle des points cycliques : tous les cercles du plan ont au moins deux points en commun, mais « pire » encore, ils sont non seulement à l'infini mais imaginaires. Les cercles sont exactement les coniques qui contiennent ces deux points, appelés points cycliques. Voilà un lien entre la géométrie euclidienne et la géométrie projective complexe. Pour Poncelet, toutes les sphères ont, en commun, à l'infini et dans le domaine imaginaire, un cercle, l'ombilicale. Les sphères, les quadriques sont, de plus, engendrés pas des droites (imaginaires), ce qui rappelle les travaux de Monge sur les hyperboloïdes et les paraboloïdes dans le domaine réel. Cependant, l'audacieux Poncelet, malgré cette avancée spectaculaire, ne va pas encore assez loin. Car, pour lui, user des coordonnées est une « souillure ». Cela a été pour lui une sorte de revirement, car la première démonstration, en prison, de son fameux théorème sur le polygone (voir plus loin) consistait en 70 pages de purs calculs de géométrie analytique ! Revenons à la géométrie projective de Poncelet. Il lui a donc manqué deux choses. D'abord, le lien cherché, ce que Laguerre fera dès 1850 (à 18 ans seulement, sur les bancs de la classe préparatoire à l'École polytechnique, pour remédier au cours de son professeur qui ne le satisfaisait pas), par la formule suivante, qui fournit, grâce aux points cycliques, une interprétation projective de l'angle $angle\,(\mathrm{D},\mathrm{D}')$ entre deux droites du plan euclidien :

$$angle\,(\mathrm{D},\mathrm{D}') = \frac{1}{2}\left|\log\left(\left[D^{\mathrm{C}}, D'^{\mathrm{C}}, I, J\right]\right)\right|$$

Dans cette formule, D^{C} et D'^{C} désignent les points à l'infini des droites considérées D et D', I et J les points cycliques, $\log$ le logarithme, et le crochet $[\mathrm{D}^{\mathrm{C}}, \mathrm{D}'^{\mathrm{C}}, \mathrm{I}, \mathrm{J}]$ le birapport de ces quatre points sur la droite de l'infini (complexe bien sûr).



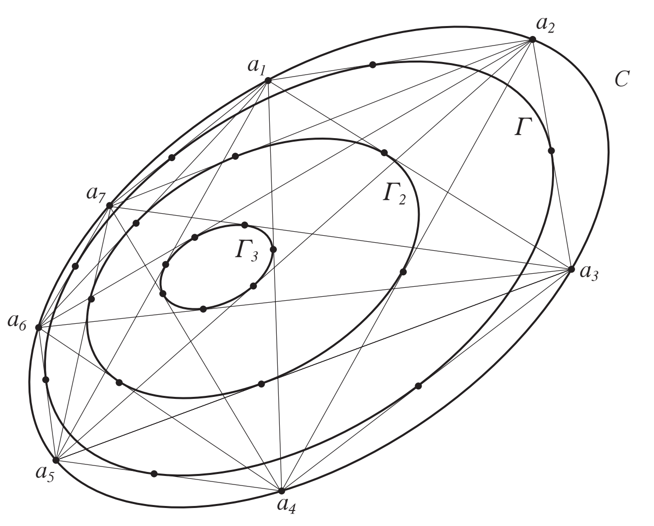
Quelles que soient les 4 droites concourantes et les deux droites sécantes, on a toujours

$$\frac{\overline{\mathrm{CA}}}{\overline{\mathrm{CB}}} \Big/ \frac{\overline{\mathrm{DA}}}{\overline{\mathrm{DB}}} = \frac{\overline{\mathrm{C'A'}}}{\overline{\mathrm{C'B'}}} \Big/ \frac{\overline{\mathrm{D'A'}}}{\overline{\mathrm{D'B'}}}$$

Le birapport est invariant par projection comme le savait déjà Pappus (*c.* 400 après J.-C.), mais pas dans le cas projectif, ou en utilisant uniquement des nombres positifs ; ce sera Chasles qui donnera vraiment aux nombres de tout signe le droit de cité en géométrie.

Poncelet ne réalise pas que l'invariant essentiel de la géométrie projective est le birapport. Chasles et les Allemands (Von Staudt, Plücker) sauront le faire : second manque.

C'est en prison, à Saratov, que, muni de ses inventions projectives expliquées ci-dessus, il imagine et démontre un théorème extraordinaire, celui dit des polygones de Poncelet. Pour sa démonstration, il utilise sa grande découverte des points cycliques ; cela lui permet de remplacer les deux coniques quelconques par deux cercles. Il démontre alors le théorème « à la main », pour deux cercles, avec des moyens euclidiens assez classiques mais brillants (du moins dans son livre postérieur, la démonstration de Saratov se faisant, on l'a vu, par de longs calculs en coordonnées). Il en conclut, grâce au principe de continuité, qu'il peut revenir à ses deux coniques initiales. C'est ce genre de considérations, injustifiées pour beaucoup, que Cauchy critiquait, certes à juste titre, sans toutefois réaliser que ces inventions étaient géniales et promises à un bel avenir. Le théorème des polygones de Poncelet affirme donc que si un polygone est inscrit dans une conique et circonscrit à une autre, il en existe alors autant que l'on veut ; il suffit de partir d'un point quelconque de la première conique. C'est une dichotomie : étant donné deux coniques, ou bien il n'existe aucun polygone inscrit dans l'une et circonscrit à l'autre, ou il en existe une infinité.



Le théorème de Poncelet.

Il n'est guère de grand mathématicien qui n'ait été enthousiasmé par ce théorème, qui n'ait cherché sa propre démonstration, ou une généralisation. En effet, même pour une paire de cercles, le résultat reste toujours de démonstration cachée. Il n'existe aucune démonstration élémentaire, qui aille réellement au fond des choses. Toutes demandent l'introduction de concepts nouveaux. Est par exemple cachée dans ce théorème une bonne partie de la théorie des fonctions elliptiques. D'ailleurs, c'est en partie pour comprendre ce théorème que Jacobi développa la théorie de ces fonctions.

Résumons-nous : Poncelet achève le retour à la géométrie « pure », à cette époque charnière entre la fin du XVIII^e^ et le début du XIX^e^ siècle. Observons que ce renouveau de pureté coïncide avec la grande époque du romantisme. Ainsi, ce romantisme est peut-être responsable du fait que la construction rigoureuse de l'espace projectif complexe (et même réel) ne sera faite qu'en Allemagne, grâce à l'introduction par Plücker des coordonnées homogènes (complexes ou réelles, au choix). Poncelet souligne explicitement que « l'usage de coordonnées est une souillure ». Du coup, cela l'empêche de fonder solidement ce que son intuition lui a fait percevoir, et qui le sera par Plücker, Von Staudt et Grassmann. Mais, *a contrario*, c'est ce désir de s'abstenir de coordonnées qui le pousse à inventer les principes fondamentaux de continuité et de projectivité.

Dans l'esprit de ce que nous avons dit ou dirons sur Weil, Leray, Laplace, Lagrange, la grande partie de la carrière de Poncelet passée à étudier la mécanique théorique et créer des mécanismes effectifs démontre que, pour lui aussi, les mathématiques ont un intérêt double et simultané : les mathématiques en elles-mêmes, et les applications « pratiques » en découlant.

Mais restons-en à la géométrie pure, avec le grand continuateur de Poncelet, ***Michel Chasles*** (Épernon 1793, Paris 1880), l'homme « pour qui les coniques n'avaient plus de secrets », « l'empereur de la géométrie », le précurseur du calcul vectoriel. Chasles est établi comme agent de change ; mais c'est un spéculateur malheureux ! Ruiné, il se remit aux mathématiques, avec un grand succès cette fois-là. Il fut professeur à la Sorbonne, à l'École polytechnique, membre de l'Académie des sciences. Il fonda la Société mathématique de France, dont il fut le premier président. Pour plus de détails, voir Dahan Dalmedico et Pfeiffer (1986).

Chasles prolonge l'œuvre de Poncelet, mais l'enrichit de façon considérable. D'une part, il fonde complètement la géométrie projective sur la notion de birapport, sans avoir peur des nombres négatifs, notion devinée par Pappus et utilisée incomplètement par Desargues. Il n'est guère de géométrie moderne sans birapport : dans les géométries hyperboliques, dans la théorie des groupes de transformations, etc. D'autre part, il introduit une notion nouvelle, celle de correspondance algébrique. Il en donne deux applications bien différentes : la première est sa démonstration du théorème de Poncelet sur les polygones. La seconde est relative au problème des cinq coniques, débat qui faisait rage à cette époque (voir le chapitre IV de Berger, 2006).

Ses deux livres, qui furent très longtemps des classiques, surtout le premier, restent encore à lire : *Aperçu historique sur le développement des idées en géométrie*, en 1837, et *Traité de géométrie supérieure*, en 1832.

Là ou les relations qui portent son nom ne rendent pas compte de la profondeur de son œuvre, elles ne font que traduire le fait que les nombres de signe quelconque ont maintenant voix au chapitre dans la géométrie (même non analytique).

Dans ces formules : $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$

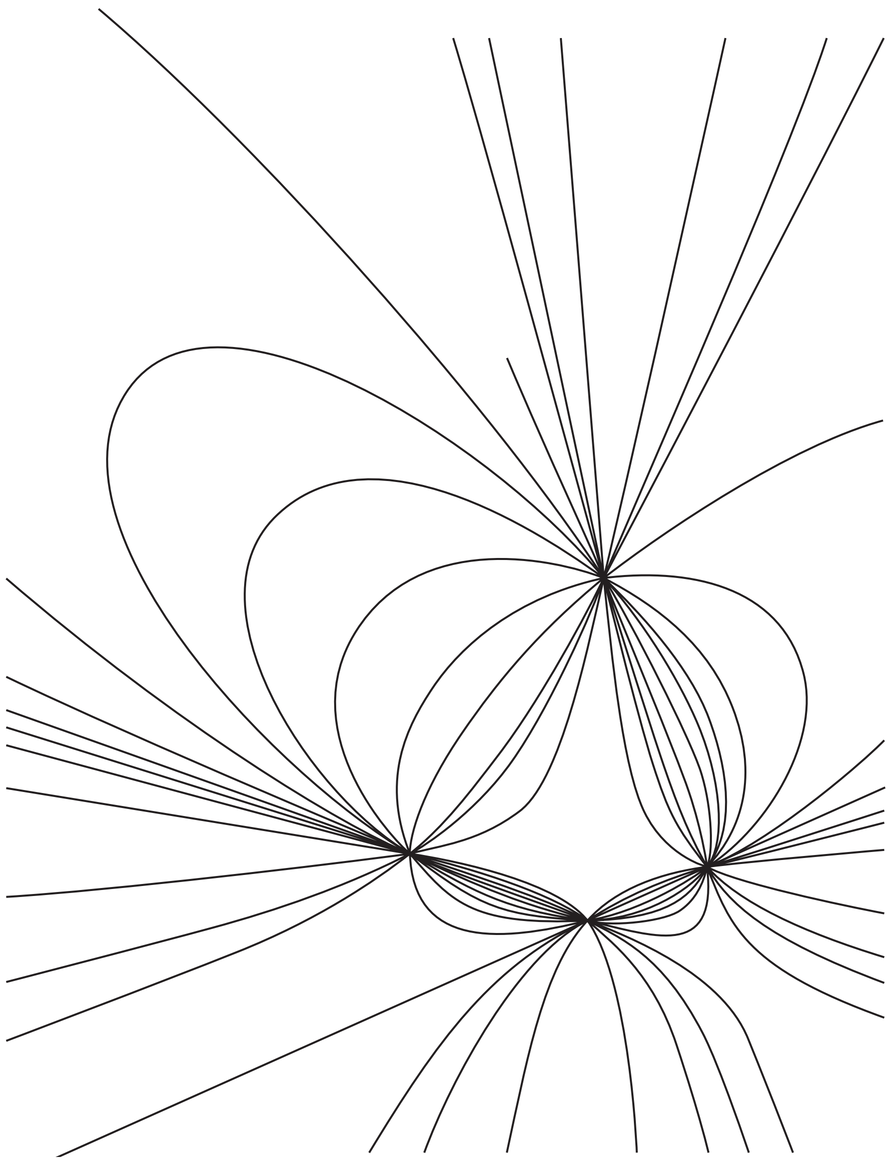
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

les quantités surlignées représentent les valeurs algébriques, pour un choix sur la droite donnée d'une abscisse. Pour trois vecteurs liés dans le plan, ce sont les quantités avec une flèche qui désignent les vecteurs liés. Rappelons que les nombres négatifs, en géométrie, furent pratiquement bannis jusqu'à Chasles.

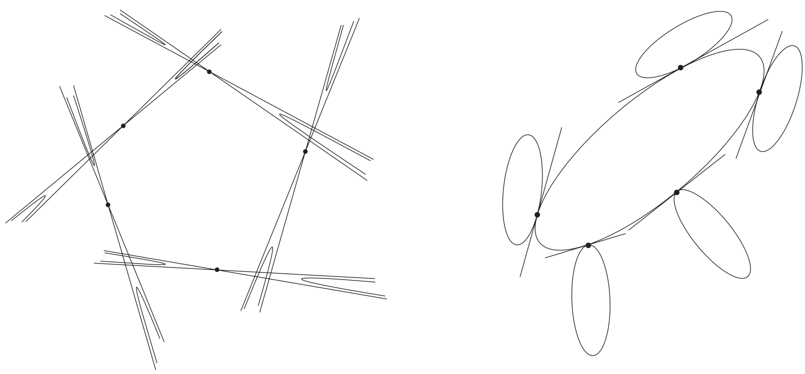
Les relations de Chasles, pour trois points sur une droite.

Chasles est aussi, on l'a dit, « l'homme pour qui les coniques n'avaient plus de secrets ». L'étude des coniques est certes jalonnée de figures comme celles d'Apollonius, Pappus, Desargues, Pascal, Poncelet, Plücker. C'est Poncelet qui est le premier à étudier systématiquement les faisceaux de coniques. Mais la façon dont il réalise la notion de dualité par rapport à une conique, et la généralise, est fondamentale. Voici l'un de ses plus grands résultats, le théorème des 3264 coniques. Un résultat facile, classique, est qu'il y a jusqu'à huit cercles tangents à trois cercles donnés du plan. Mais pour les coniques, la chose devient soudain d'une difficulté redoutable. Par cinq points donnés, il passe une seule conique (et une seule), par contre, par quatre points donnés, plus une droite, il passe deux coniques tangentes à cette droite. Mais si l'on veut que par ces quatre points passe une conique tangente à une autre conique donnée, il en passe en général six. Combien alors y a-t-il de coniques tangentes à cinq coniques données ? Si l'on se place du point de vue du théorème de Bézout, il en existe $6^5 = 7776$. Cela fut affirmé par Steiner, mais ceux qui avaient des doutes n'osaient pas le dire, considérant Steiner comme un trop grand géomètre pour avancer à tort une telle assertion. Or le bon résultat est 3264, et c'est à Chasles que l'on doit une première étude complète de ce genre de questions sur les coniques (étude si difficile qu'elle ne fut guère terminée avant les années 1950). La maîtrise de Chasles pour les coniques passe par le cas incontournable des faisceaux de coniques, c'est-à-dire la famille des coniques qui passent par quatre points.

Le lecteur naïf pourrait dire (moi-même, je me suis pris au piège) : tout ce qui précède se réalise dans l'espace projectif complexe de Poncelet, là où par exemple deux cercles ont toujours quatre points communs. Mais dans le cas réel, bien visible, on voit mal comment cinq coniques pourraient admettre 3264 coniques qui leur soient tangentes. Or, tout récemment (voir le chapitre IV de Berger, 2006), l'on a trouvé une configuration qui fournit effectivement ce nombre ahurissant.



Faisceau de coniques.



La figure de gauche formée par les cinq hyperboles admet effectivement 3264 coniques (différentes) tangentes chacune à ces cinq hyperboles.

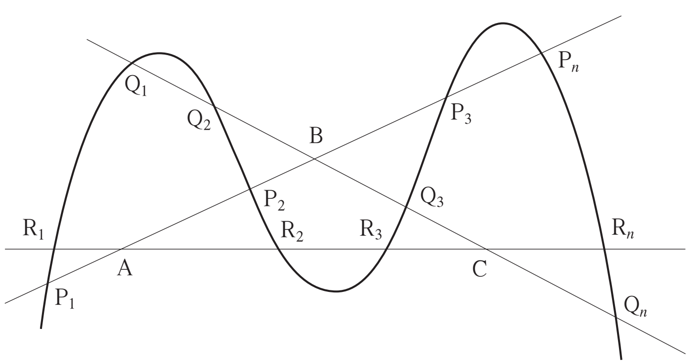
Ce problème des cinq coniques a été un moteur considérable en géométrie algébrique, forçant les mathématiciens à bâtir une théorie correcte de l'intersection ; celle-ci, dans toute sa généralité, sur tous les corps de base et en toutes dimensions, ne fut terminée complètement qu'en 1984 par Fulton dans son livre de référence récemment mis à jour (Fulton, 1998).

Fort d'une vision remarquablement claire de la géométrie, Chasles écrit pourtant, en 1837, des réflexions qui semblent bien erronées aujourd'hui. En Allemagne, Klein, au tournant du XXe siècle, fait de même ; cela démontre certes une méconnaissance certaine de la nature profonde des mathématiques, mais peut-être l'Histoire, et l'époque, peuvent-elles fournir une explication à ces mots : « Aujourd'hui, chacun peut se présenter, prendre une vérité quelconque connue, la soumettre aux différents principes généraux de transformation ; il en retirera d'autres vérités, différentes ou plus générales ; et celles-ci seront susceptibles de pareilles opérations ; de sorte qu'on pourra multiplier presque à l'infini le nombre de vérités nouvelles déduites de la première. Peut donc qui voudra, dans l'état actuel de la science, généraliser et créer en géométrie ; le génie n'est plus indispensable pour ajouter une pierre à l'édifice. » On rapprochera *a contrario* ce texte de la citation de Weil citée plus haut au sujet de Monge.

D'autres erreurs, non scientifiques celles-là, seront commises par Chasles dans son grand âge. À ce naïf collectionneur d'autographes, passion qui attriste ses amis et l'Académie à la fin de sa vie, le faussaire Vrain-Lucas fournit un grand nombre de lettres prétendument écrites de la main de personnes célèbres, en particulier une lettre écrite en ancien français de Marie-Madeleine à Lazare, que Chasles paye deux cent mille francs…

Lazare Carnot (Nolay 1753, Magdebourg 1823) est le père de Sadi Carnot (le fondateur de la thermodynamique), mais c'est surtout l'organisateur de la victoire par la façon dont il modèle les armées républicaines, notamment au moment de la bataille de Wattignies en 1793. Il est alors connu de chaque Français. En mathématiques, il annonce la relance de la géométrie projective par Poncelet. C'est un précurseur de la notion d'espace métrique en géométrie algébrique. C'est aussi l'un des premiers à admettre les nombres négatifs en géométrie. Il est également poète, homme politique. Mais, mauvais financier, ses investissements coloniaux le ruinent ; l'Empereur lui offre alors généreusement un poste. Plusieurs livres lui sont consacrés (Von Neumann, 1961 ; Reinhard, 1950–1952).

Il n'a certes pas la stature des grands de l'époque, mais mentionnons deux résultats originaux en géométrie euclidienne. Il découvre les relations qui lient les distances mutuelles : six distances pour quatre points du plan, dix distances pour cinq points de l'espace. On lui doit aussi une formule pour calculer le volume d'un tétraèdre en fonction des six arêtes. Comme la théorie des déterminants n'est pas encore connue, il écrit une formule longue de 130 termes ! Il obtient aussi une relation métrique pour les sécantes d'une courbe algébrique de degré quelconque. Son ouvrage *Géométrie de position* eut une influence énorme, notamment sur Poncelet ; il s'agit pour lui de « libérer la géométrie des hiéroglyphes de l'analyse »...



Théorème de Carnot. Soit ABC un triangle et Γ une courbe algébrique de degré n. On note $P_1, ..., P_n$ les intersections, éventuellement imaginaires, de la droite (BC) avec Γ, $Q_1, ..., Q_n$, celles de (AC) avec Γ et $R_1, ..., R_n$ celles de (AB) avec Γ. On a alors l'égalité :

$$\frac{\overline{P_1B}}{\overline{P_1C}}\cdots\frac{\overline{P_nB}}{\overline{P_nC}}\times\frac{\overline{Q_1C}}{\overline{Q_1A}}\cdots\frac{\overline{Q_nC}}{\overline{Q_nA}}\times\frac{\overline{R_1A}}{\overline{R_1B}}\cdots\frac{\overline{R_nA}}{\overline{R_nB}}=1$$

Mathématicienne complète, tant en mécanique qu'en théorie des nombres, ***Sophie Germain*** (Paris, 1776–1831) est la première femme mathématicienne d'envergure après Hypathie (Alexandrie, 370–415). Elle doit utiliser un pseudonyme masculin pour correspondre avec Lagrange, mais doit encore le réutiliser pour sa correspondance avec Gauss. Pour plus de détails, les longues querelles avec Poisson notamment, voir Thuillier (1996).

En théorie des nombres, elle fait faire un progrès capital au théorème de Fermat. Elle démontre que si l'on a $a^5 + b^5 = c^5$, alors les trois nombres entiers a, b, c sont tous les trois divisibles par 5. Cela lui permet de démontrer le théorème de Fermat jusqu'à l'ordre 100.

En géométrie appliquée à des problèmes de mécanique, c'est elle qui introduit le nom et la notion de courbure moyenne pour l'étude des surfaces. Ce qui lui sert entre autres pour étudier les vibrations des lames élastiques, car elle démontre que la force d'élasticité est proportionnelle à la courbure moyenne. Son travail n'est pas complètement clair, le texte de *Pour la science* (Thuillier, 1996) explique bien pourquoi : une femme n'a alors pratiquement pas accès aux endroits où elle pourrait, par des échanges, des conversations (on dirait aujourd'hui des séminaires, des conférences), écrire les choses de façon plus « solide ». S'ensuit une longue querelle avec Poisson. La difficulté concernant les objets vibrants est de passer du cas unidimensionnel des cordes vibrantes (ou des tiges, comme chez Euler) à celui des lames, des plaques, des surfaces, donc des objets à deux dimensions. C'est un saut considérable, à la fois pour la physique (et les justifications des équations utilisées) et pour les mathématiques. Une autre difficulté : il s'agissait vraiment de physique mathématique : théorie atomique, etc.

$$\mathrm{N}^2\left(\frac{\partial f}{\partial s_1^4} + 2\,\frac{\partial^4 f}{\partial s_1^2\,\partial s_2^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial s_2^4} - \frac{4}{S^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial s_2^2}\right)\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

Voici l'équation obtenue par Sophie Germain pour décrire les vibrations d'une surfaces élastique de l'espace d'épaisseur constante, une des questions posées par l'Académie des sciences, résolue par la mathématicienne en 1816, ce qui lui valut un prix. Dans cette équation, la fonction inconnue f représente le déplacement (la vibration) de la surface le long de ses droites normales, les variables s_1 et s_2 sont les longueurs d'arc le long des lignes de courbure de cette surface (lignes découvertes par Monge), N est une constante physique dépendant de la nature physique de la surface et $1/\mathrm{S}$ désigne la fonction courbure moyenne de cette surface, notion nouvelle introduite par Sophie Germain ($1/\mathrm{S}$ est égal à $1/r_1 + 1/r_2$, où r_1 et r_2 désignent les rayons de courbure principaux, introduits eux aussi par Monge). Lorsque la courbure moyenne est nulle, l'un des termes disparaît, et l'on retrouve l'équation des vibrations des plaques planes découverte auparavant par Lagrange. Mais aussi celle des vibrations d'un film de savon s'appuyant sur un contour, car leur courbure moyenne doit aussi être nulle.

Voici maintenant un analyste de premier plan, et un pionnier en calcul des probabilités : ***Siméon Denis Poisson*** (Pithiviers 1781, Sceaux 1840). Poisson veut être médecin, mais quelque chose d'assez rare se produit : arrivé à son cours d'histoire naturelle, il se trompe d'heure et débouche dans un cours de mathématiques avec si peu d'auditeurs que le professeur l'empêche de sortir. Tout de suite, il est passionné, se tourne définitivement vers cette matière. On a déjà évoqué sa querelle avec Sophie Germain, il se querelle aussi avec Navier (voir Cannone et Friedlander, 2003).

En probabilités, il généralise la loi des grands nombres (c'est lui qui la baptise ainsi), découverte par Bernoulli. Cette loi des grands nombres est essentielle en pratique, car elle montre que le calcul des probabilités « marche bien » dans la vie réelle, et n'est pas qu'une hypothèse sans conséquence pratique. En outre, il introduit la deuxième loi des probabilités (celle qui régit par exemple les appels téléphoniques), la plus importante après la loi normale. La loi de Poisson, dite distribution de Poisson, dépend d'un paramètre, à choisir selon le problème étudié, et donne les probabilités dans une file d'attente (problème pratique s'il en est !) qui s'écrit :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} = n) = \frac{\delta^n}{n!}\,\mathrm{e}^{-\delta}$$

La célèbre formule de Poisson est fondamentale en théorie des réseaux, car elle établit le lien entre les vibrations périodiques et les trajectoires périodiques de ces réseaux. C'est un outil indispensable en théorie des codes correcteurs d'erreurs. Cette formule et ses nombreuses généralisations (par exemple dans le cadre de la géométrie riemannienne) sont d'un usage constant aujourd'hui, car elles fournissent des passerelles entre objets de nature différente, géométrique et analytique.

$$(4\pi t)^{-1}\sum_{m,n}\left(\exp\left(-\frac{m^2+n^2}{4t}\right)\right) = \sum_{m,n}\exp\left(-4\pi t^2\,(m^2+n^2)\,t\right) \text{ pour tout } t$$

Formule de Poisson. La sommation porte sur tous les entiers m et n.

Ses contributions en EDP sont essentielles, son nom restant d'ailleurs attaché au noyau de Poisson en EDP et aux crochets de Poisson en théorie des fonctions et en mécanique analytique. Poisson continue par ailleurs l'étude des séries de Fourier.

$$P(z, r, \theta) = \frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\theta} - z|^2}$$

Le noyau de Poisson (fonction de la variable complexe z et des deux variables réelles θ et $r > 0$) permet de calculer complètement toute fonction harmonique (holomorphe) à l'intérieur d'un disque en fonction de la seule valeur de cette fonction sur le cercle qui borde ce disque (théorème de la représentation conforme).

c L’interrègne relatif et ses gloires ponctuelles : 1840–1930

Hermite, Jordan, Darboux, Poincaré, Picard, Baire, Bachelier, É. Cartan, Hadamard, Borel, Lebesgue, Lévy

Expliquons-nous d’abord sur le titre de cette section. Nous avons évoqué dans l’introduction les éclipses partielles de l’école mathématique française : 1840–1880, 1910–1930 (la période 1880–1910 est certes plus glorieuse que celles qui l’entourent, de très grands noms y figurent, mais il n’y a pas d’écoles au sens moderne du terme, au sens de maîtres entourés de nombreux élèves, disciples, assurant en quelque sorte une continuité, un réservoir, un fonds où puiser). Non seulement la géométrie, mais encore l’analyse et l’algèbre, qui connaissent alors un essor très important, passent en Angleterre et en Allemagne. Nous n’ignorons pas, mais nous devrons être brefs sur ce sujet, qu’il commence à se faire de bonnes mathématiques dans d’autres pays : la Scandinavie, les Pays-bas, la Pologne et la Hongrie. La lente montée en puissance de l’école russe, aussi. Mais la densité y reste faible. Tandis que, dans la voûte céleste, Allemagne et Angleterre occupent le ciel de leurs brillantes constellations. La France n’expose que quelques étoiles, certes de première grandeur, et nous les étudierons de suite. Weierstrass considère encore, pourtant, que c’est à Paris que se font les mathématiques ! Une raréfaction encore plus grande se produit au sein de l’école française à partir de 1920. Pourquoi ?

La loi des petits nombres mentionnée plus haut ne suffit pas à justifier une aussi longue absence. Proposons quelques hypothèses additionnelles. La première vaut pour toute la période en jeu ; la France se repose sur les institutions qui ont fait leurs preuves jusqu’alors : les deux grandes écoles (l’X et l’ENS) et l’Académie des sciences. Mais ces deux écoles forment essentiellement des ingénieurs et des militaires, ainsi que des enseignants (certes de très bon niveau) ; la recherche en mathématiques pures n’y a pas place directement, alors que cette recherche prend justement une tournure de plus en plus abstraite. Pour Monge, il n’y a pas de grandes différences entre ingénieurs civils et militaires. Nos universités non plus ne sont pas vraiment développées en ce sens. Il en va tout autrement dans les deux pays dont nous parlons, en Angleterre avec le système des collèges (Oxford et Cambridge notamment), en Allemagne avec les universités en un sens plus classique. Nous pouvons même lire sous la plume d’un historien des mathématiques : « la France a perdu la guerre de 1870 parce qu’elle n’avait pas su développer ses universités. » On trouvera dans Booss-Bavnbek et Hoyrup (2003, p. 4) une citation intéressante de Picard qui craignait, à la suite de la première guerre mondiale, que les jeunes mathématiciens n’optent plus que pour les seules mathématiques appliquées (ce même livre contient, page 34 et suivantes, une analyse de la situation dans les autres pays).

Une raison secondaire, mais intéressante : la dictature des tenants de la « géométrie pure », Poncelet et surtout Chasles. En sens inverse de Descartes, pourtant compatriote, Poncelet puis Chasles insistent pour faire de la géométrie « pure » sans aucun calcul, sans coordonnées bien sûr. Cela leur permet certes de créer une géométrie projective, une théorie des coniques, toutes les deux en partie intuitives, mais il faut bien un jour fonder tout cela plus rigoureusement ; c'est ce que fait l'école allemande de géométrie. Certains historiens font même remarquer, on l'a dit, que cette période de la géométrie pure coïncide avec l'apogée du mouvement romantique.

La raison suivante est admise par tous : la première guerre mondiale. Plus précisément : l'Allemagne, mais aussi la Russie et le Royaume-Uni, n'envoyèrent pas sur le front leurs brillants cerveaux, tandis que l'égalitarisme en France fut absolu. Témoins les promotions entières de l'École polytechnique et de l'ENS qui disparurent entièrement, à la seule exception de Paul Lévy et de Julia.
La France ne se remit pas de cette hécatombe avant les jeunes Bourbaki des années 1930. Mais ceux-ci n'avaient pas le contrôle de l'enseignement et de la recherche ; en conséquence, il faut constater que, jusqu'en 1955, il n'y avait pas à Paris, à la Sorbonne, un seul cours de mathématiques, du premier au troisième cycle, qui ne soit pas complètement obsolète, à l'exception de celui de Paul Lévy. Pire encore, le ministère de l'Éducation nationale interdit à Henri Cartan, alors directeur des études de mathématiques à l'ENS, d'envoyer en stage de trois mois quelques élèves à Nancy, où le corps enseignant était enfin à la hauteur des mathématiques modernes. On interdit aussi à Cartan de faire donner aux jeunes normaliens des cours par Jean-Pierre Serre ! « Les bonnes mathématiques se font à Paris », affirmait le ministère de l'Éducation nationale. Pourquoi n'est-ce pas le cas ? Les professeurs en place sont certes de bons mathématiciens, mais ils sont trop âgés ; Élie Cartan est complètement sous-estimé par ses collègues de la Sorbonne, à l'exception de Julia, qui permet aux jeunes Bourbaki de tenir un séminaire sur les travaux d'Élie Cartan dans les années 1930–1940. Ce séminaire, dit « de Julia », eut alors une certaine importance. On remarquera que Julia eut Dixmier comme élève, qui à son tour fut le directeur de thèse de Connes. Paul Lévy avait la stature nécessaire, mais il était par trop prophétique ; c'était aussi un enseignant quelque peu obscur (trop profond ?). Les élèves de Polytechnique où il était professeur (tandis que Leprince-Ringuet y enseignait la physique) le surnommaient « le prince des ténèbres »...

Nous expliquerons plus loin comment nous sommes finalement sortis de ce marasme. Cette importante obsolescence se confirme au niveau des ouvrages de mathématiques qui ont cours en France. Le livre fondamental *Algèbre moderne* de Van Der Waerden (1930–1931), paru en allemand et immédiatement traduit en anglais, y est complètement ignoré (au pays de Galois, dont la « théorie » occupe pourtant une part importante de ce livre !), tout comme les *Méthodes de physique mathématique* de Courant et Hilbert (1924), paru en allemand dès 1924, traduit en anglais en 1937 et qui eut une influence considérable dans le monde entier. Cette affolante carence française est bien relevée dans la préface de Darmois au livre de Lichnerowicz, *Algèbre et analyse linéaire*, paru en 1947, le premier manuel moderne français destiné à l'enseignement supérieur.

On observe également que ce trou historique, surtout avec la guerre, n'a pas affecté seulement les mathématiques, mais toute la science française en général. C'est ainsi que la mécanique quantique ne commence à « sortir du guêpier », comme le dit Pierre Cartier, que vers 1955–1964 ; ce n'est qu'à partir de là que paraissent des livres de physique qui la mentionnent. Pire, les équations de l'électromagnétisme de Maxwell, pourtant datées de 1873, ne figurent pas avant longtemps dans les livres basiques d'enseignement de la physique.

Que s'est-il fait comme découvertes de premier plan durant cet interrègne, en dehors de la France ? Plus encore que pour le « premier trou » de 1650–1750, nous devrons être brefs, la création mathématique croissant exponentiellement avec le temps. Le travail de mise en forme de l'analyse, commencé par Cauchy, est terminé par Weierstrass et son école en Allemagne. En Angleterre, Cayley domine l'algèbre et la géométrie analytique. On y ajoutera les noms de Clifford, célèbre dans la petite histoire pour avoir été un incroyable athlète, se hissant sur une barre fixe avec un seul bras, et surtout grimpant sur le clocher d'une église et se tenant, pieds en l'air, par ses seules mains posées sur la croix tout en haut de ce clocher. Plus généralement, la France rate complètement le tournant de la nouvelle algèbre ; exception faite pour Hermite, qui forme avec Cayley et Sylvester la trinité invariantive. Notons en passant que Sylvester passa une bonne partie de sa carrière aux États-Unis et qu'il est l'un des fondateurs des mathématiques de recherche dans ce pays. En algèbre, le nom de l'Allemand Dirichlet est attaché pour toujours à son résultat affirmant que, dans toute progression arithmétique, il y a toujours une infinité de nombres premiers. En Angleterre, on trouve aussi Stokes, dont le nom est lié à la formule de Stokes, relation essentielle (tout comme ses nombreuses généralisations) car elle fournit une égalité entre une intégrale à l'intérieur d'un domaine et une intégrale sur la frontière de ce domaine (voir Cannone et Friedlander, 2003). On trouvera plus de détails dans les deux chapitres du livre de Boyer (1968), dont les titres sont révélateurs : chapitre XXV : « The Arithmetization of Analysis » et chapitre XXVI : « The Rise of Abstract Algebra ».

La France a manqué le développement de l'algèbre non seulement dans la deuxième partie du XIXe siècle, mais aussi dans la première moitié du XXe, comme on va le voir. Les invariants sont, pendant ce temps, compris par Hilbert (théorème des syzygies). Mais aussi la logique, par Boole. En algèbre pure, signalons la théorie des idéaux de Kummer (créée pour essayer de démontrer le théorème de Fermat), devenue la base de toute l'algèbre commutative.

La théorie des groupes, en liaison avec la géométrie, est l'œuvre de Klein et Hilbert en Allemagne. Steiner, Plücker et Grassmann sont de grands artisans de la géométrie classique, tandis que Minkowski fonde la notion moderne de convexité, avec ses applications tant en géométrie qu'en théorie des nombres. Il est aussi l'un des fondateurs de la relativité restreinte. La théorie « moderne » des nombres fleurit en Allemagne, avec Hilbert, Dedekind, Minkowski, Landau ; particulièrement la notion « incontournable » de forme modulaire. Voilà tout ce que découvrirent Weil et Dieudonné lors de leur séjour en Italie, mais surtout en Allemagne, en tant que boursiers. Ils se rendirent alors compte du retard considérable pris par notre pays.

En analyse, mentionnons Hilbert (la notion d'espace de Hilbert domine aujourd'hui une bonne partie des mathématiques : il s'agit, ni plus ni moins, encore fallait-il le faire, de la géométrie euclidienne en dimension infinie), Herman Weyl, Courant, pour l'école allemande, toute l'étude des surfaces de Riemann, Teichmüller. C'est à Weyl que l'on doit la célèbre phrase : « Les mathématiques sont la science de l'infini. » Voilà pour les déficits historiques (voir le calcul différentiel et intégral plus haut) de la France. Les fonctions elliptiques connaissent pour leur part une sorte d'achèvement avec l'école allemande, principalement Jacobi.

Mais la France est aussi absente, du moins à leurs débuts, des deux grandes « crises » mathématiques de l'époque, celle de la découverte des géométries non euclidiennes et celle de la théorie des ensembles (avec ses fameux paradoxes et les querelles qu'ils alimentèrent). Citons la logique avec Boole, la théorie des ensembles de Cantor, les axiomes des nombres entiers : Zermelo, Peano et Frankel, Russel. Puis, plus tard, la bombe que constituent les théorèmes de Kurt Gödel en 1930–1931. La « dictature » d'Hermite joue aussi un rôle certain dans cette absence. Riemann est si prophétique qu'il faut attendre le tournant de 1900, l'école italienne de Levi-Civita et Ricci pour étudier sérieusement les géométries riemanniennes. Cependant, en France, Élie Cartan leur fait faire un bond spectaculaire dans les années 1920, son livre *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann* constituant la seule référence de base sur le sujet de 1928 aux années 1970 (Cartan, 1928).

À part Poincaré, la France est aussi inexistante en topologie, topologie algébrique comprise, tandis que Heinz Hopf en Allemagne, Whitney aux États-Unis, Whitehead en Angleterre lui font faire des progrès considérables.

Ajoutons cependant que Poincaré apporte des contributions essentielles à la géométrie hyperbolique (la géométrie non euclidienne fondamentale) ; Hadamard y participe aussi. Poincaré le fait en liaison étroite avec la théorie des groupes, « à la Klein ». On sait que Klein fit une dépression nerveuse lorsqu'il apprit la découverte de Poincaré et qu'il ne s'en remit jamais vraiment.

Revenons maintenant plus en détail sur les étoiles de première grandeur, certes isolées, qui brillèrent durant cet interrègne [très bien décrit dans l'autobiographie de Weil (1991), qu'il faut absolument lire car, entre autres qualités, remarquablement écrite]. On y constate que le séminaire d'Hadamard au Collège de France — l'un des premiers séminaires systématiques avec celui de courte durée organisé par les jeunes Bourbakis — fut le seul lieu où Weil put « trouver des mathématiques » dans notre pays…

Le grand analyste et algébriste de son époque est ***Charles Hermite*** (Dieuze 1822, Paris 1901) ; c'est l'homme le plus doux, le plus modeste, le plus gentil de toute l'histoire des mathématiques. Il est vénéré comme le doyen des mathématiciens français à la fin du XIXe siècle.

Mais c'est aussi le dictateur des mathématiques françaises, celui qui décide que telle ou telle recherche est intéressante ou non. On va voir qu'il reprocha à Hadamard d'avoir écrit un article de géométrie dont on sait aujourd'hui qu'il est fondateur de la théorie du chaos, traitant des géodésiques des surfaces à courbures opposées. De même, il rejette les découvertes nouvelles des fonctions n'ayant de dérivées nulle part ; le mouvement brownien est pour lui un « monstre parfait ».

Familialement, Hermite échappe de peu à la guillotine ! Son grand-père paternel fut ruiné sous la Révolution et mourut en prison ; quant au frère de ce grand-père, il fut guillotiné. Le père d'Hermite n'y échappa que grâce à son jeune âge… Hermite fut converti au catholicisme par Cauchy, lors d'une grave maladie qui le frappe à 44 ans.

Jeune, il est par nature en dehors du système scolaire normal, et tous ceux qui n'aiment pas les examens se retrouveront en lui. Il préfère lire des travaux antérieurs (entre autres, un mémoire de Lagrange) plutôt que de bachoter, surtout la géométrie élémentaire. Les cours qui y sont consacrés laissent certainement à désirer, ce qui n'est pas le cas des cours de physique, qui le passionnent. Cependant, poussé par des professeurs qui sentent bien son génie, il finit par entrer à Polytechnique (au 63e rang ! Il est évidemment d'un tout autre niveau que ses examinateurs…). Il en est exclu pour claudication. Mais il a déjà publié plusieurs résultats originaux en 1842 dans les *Nouvelles Annales de mathématiques*. Il faut noter que le professeur qui le découvre est Louis-Paul-Émile Richard, le même qui découvrit le génie de Galois ! Par une ironie de l'Histoire, le premier poste d'Hermite est celui d'examinateur à Polytechnique.

Il a une importance considérable de par son enseignement. On trouve parmi ses élèves Picard, Darboux, Appell, Painlevé, Borel ou Poincaré. Mais il a aussi une grande influence à l'étranger. Quoique très patriote, il affirme lors de l'invasion prussienne de 1870 que les mathématiques « de l'ennemi » sont des mathématiques et rien d'autre. Son attitude envers les nombres est quasi mystique, pour le moins platonicienne. En effet, Platon était persuadé que les objets mathématiques, les nombres, les fonctions, etc., existent indépendamment de l'esprit. Pour ce débat entre platoniciens et réductionnistes, bien souvent un véritable dialogue de sourds, on se référera à Changeux et Connes (1989). Citons Hermite : « Je crois que les nombres et les fonctions de l'analyse ne sont pas le produit arbitraire de notre esprit ; je pense qu'ils existent en dehors de nous, avec le même critère de nécessité que les choses de la réalité objective, et nous les rencontrons, nous les découvrons et les étudions, comme les physiciens, les chimistes et les zoologistes. » D'un autre mathématicien : « Parlez avec Monsieur Hermite : il n'évoquera jamais une image concrète ; mais vous percevrez vite que les concepts les plus abstraits sont pour lui des créatures vivantes. »

Son aversion pour la géométrie ne s'éteint pas, malgré tous ses succès académiques ; elle reste légendaire et est idéalement illustrée par l'anecdote suivante, qui concerne Hadamard et l'affaire Dreyfus. Dans le climat de cette époque, Hermite, rencontrant Hadamard, lui dit : « Hadamard, vous êtes un traître » (Hadamard est un grand militant dreyfusard). Avant même qu'Hadamard n'ait pu réagir, Hermite ajoute : « Vous avez trahi l'analyse pour la géométrie » (Hadamard vient de publier son célèbre article, voir plus bas, sur les surfaces à courbure négative).

Son aversion envers les nouvelles découvertes est très forte, par exemple envers les fonctions qui n'admettent de dérivée en aucun point ; assez fâché par l'œuvre en cours de la trinité Borel, Baire, Lebesgue, il répète plusieurs fois la phrase : « Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions qui n'ont pas de dérivée » (probablement à l'occasion de la présentation à l'Académie de la note de Lebesgue). Même Poincaré écrit : « De l'étude de tels monstres, ou de théorèmes sous des hypothèses non analytiques, il ne sortira jamais rien de bon. » Les génies se trompent parfois !

Hermite est pourtant le premier à démontrer la transcendance d'un nombre (Liouville l'avait esquissé), celle du nombre e. Peu prolifique, il ne publie que des travaux de grande importance. Le plus célèbre est évidemment cette transcendance du nombre e (en 1873), et notons en passant qu'il est rare de trouver des contributions majeures chez des mathématiciens après l'âge de cinquante ans (citons Élie Cartan — la théorie et la classification complète des espaces symétriques et leur lien avec les sous-groupes compacts des groupes de Lie — et André Weil pour ses conjectures). Hermite démontre que le nombre e, la base des logarithmes népériens, non seulement n'est pas un nombre rationnel, mais, pire, est un nombre transcendant, c'est-à-dire qui n'est jamais racine d'une équation algébrique à coefficients entiers. Cette transcendance est souvent appelée le « théorème d'Hermite ». Mais il n'arrive pas à démontrer la transcendance de π (démontrée par Lindemann un peu plus tard, en 1882). Il pense que sa méthode marchera, mais avoue ne pas avoir le courage de s'y attaquer. C'est pourtant une constante autrement plus facile à définir que e. Elle est partie intégrante de notre vie de tous les jours. Lindemann la démontrera avec la transcendance de e et la transcendance de e^{α} lorsque α est algébrique ; c'est le théorème dit aujourd'hui « d'Hermite-Lindemann ». On se sert bien sûr de l'extraordinaire relation d'Euler $e^{i\pi} = -1$.

On doit aussi à Hermite plusieurs concepts qui portent encore son nom. Il est d'abord le créateur de la notion de forme hermitienne, de matrice hermitienne, les analogues sur les nombres complexes des formes quadratiques et des matrices symétriques réelles. Cauchy démontrait que toutes les valeurs propres des matrices symétriques étaient réelles, et donc que ces matrices étaient diagonalisables. Hermite fait de même pour ses matrices. Il est parfois très en avance : cette notion de forme hermitienne n'est vraiment apparue avec toute sa force qu'en 1925, elle était restée auparavant en marge des grands courants. Le fait que les valeurs propres des matrices hermitiennes soient toutes réelles est essentiel tant en théorie qu'en pratique de l'électricité, et dans de nombreuses branches de la physique.

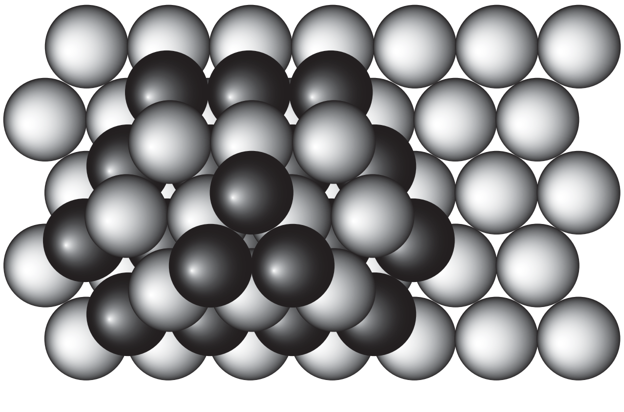
> Une forme hermitienne est une $f(z)$ qui, si $z = (z_1, \ldots, z_n)$, s'écrit $f(z) = \sum_{i,j} a_{ij}\, z_i\, \overline{z_j}$ avec les conditions $a_{ji} = \overline{a}_{ij}$ (nombre complexe conjugué) pour tout i et pour tout j.
> En langage matriciel, si $M = (a_{ij})$, on doit avoir ${}^tM = \overline{M}$ où ${}^tM$ est la matrice transposée de M et $\overline{M}$ sa matrice conjuguée.
> Alors il est toujours possible de trouver un changement de coordonnées tel que la nouvelle matrice devienne diagonale.

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{(Les } \lambda_i \text{ sont alors forcément des nombres réels.)}$$

Matrices et formes hermitiennes.

Dans l'étude des réseaux en dimension quelconque, liés on le sait aux codes correcteurs d'erreurs et aux empilements de sphères, il introduit un invariant, appelé la constante d'Hermite (on a vu à propos de Clairaut que la notion d'invariant est une parole sacrée des mathématiques ; Hermite appartient à ce que l'on a appelé, on l'a dit, la trinité invariantive, formée par Cayley, Hermite et Sylvester). C'est cette constante qui dit comment les codes correcteurs peuvent être efficaces au maximum. Plus précisément, pour tout entier, elle donne la meilleure densité possible pour un empilement de sphères centrées au point d'un réseau de dimension n. Il faut noter que cette constante existe, sans que l'on puisse connaître sa valeur exacte pour tous les n. Même aujourd'hui, on ne la connaît que jusqu'en dimension huit, au-delà il faut se contenter d'estimations asymptotiques (bien maîtrisées depuis Minkowski dans les années 1900).

Son travail sur les racines réelles des polynômes est important pour la pratique. Toujours en algèbre, il est dans les premiers à s'intéresser à ces objets de base de la théorie des nombres que sont les entiers algébriques, à savoir les nombres qui sont racines d'un polynôme dont tous les coefficients sont des nombres entiers, le premier coefficient étant l'unité.



Un empilement de sphères.

En analyse, c'est un grand innovateur de la théorie des fonctions elliptiques, qui reste toute sa vie l'un de ses grands amours. Il est le premier à appliquer la méthode de Cauchy par contours pour les relations entre pôles et zéros de ces fonctions elliptiques (par intégration « à la Cauchy » sur le pourtour d'un parallélogramme). Mais, aimant toujours la physique, il utilise les fonctions elliptiques dans les théories du pendule conique, de la courbe élastique, de la rotation d'un solide autour d'un point fixe, et dans l'équation de la chaleur.

Rappelons qu'un invariant attaché à un objet mathématique est en général un nombre (ou un ensemble de nombres) qui permet de différencier cet objet à l'intérieur d'une certaine classe d'objets similaires. Idéalement, un invariant est caractéristique lorsqu'il permet de reconnaître l'objet dans cette classe. L'invariant le plus simple est, pour les ensembles finis, leur nombre d'éléments ; c'est la notion de cardinal. Au contraire, la découverte d'invariants peut s'avérer très difficile, par exemple ceux introduits par Poincaré en topologie : groupe fondamental ou groupes d'homologie. En algèbre, les valeurs propres des matrices sont aussi des invariants essentiels, faciles à définir pour les étudiants ; mais ce n'est qu'à la suite des travaux de Cayley, Hermite, Cauchy et d'autres qu'ils furent découverts.

Il utilise enfin ses dons conjugués d'algébriste et d'analyste pour démontrer l'un des plus jolis liens qui soient entre les deux disciplines, à savoir que les racines d'une équation du cinquième degré peuvent s'exprimer à l'aide des fonctions elliptiques. C'est là un rapprochement très subtil, dû simultanément à Kronecker.

Comme Hermite, ***Marie Ennemond Camille Jordan*** (Lyon 1838, Paris 1922) est l'un des piliers des mathématiques françaises de son époque ; mathématicien complet, mais surtout théoricien des groupes.

Il est le petit-fils de Camille Jordan (1771–1821), célèbre royaliste. Émigré à la Révolution, il revient après la Terreur et devient membre du Conseil des Cinq-Cents. À la Restauration, il est l'un des principaux doctrinaires du régime. Son petit-fils entre premier à l'École polytechnique avec la note de 19,8 sur 20 (« Le 20 n'appartient qu'à Dieu », disent souvent les examinateurs, encore que cela nous semble bien discutable) et en sort pour l'École des mines. Il est nommé à l'Inspection des carrières et y restera sa vie durant. Mais il mène simultanément une carrière de mathématicien. Jordan a eu une influence considérable sur les mathématiques, outre ses recherches proprement dites. Il a dirigé de 1885 à sa mort le *Journal de mathématiques pures et appliquées* (ex-journal « de Liouville »), l'un des deux grands journaux de recherche de France pendant très longtemps, l'autre étant les *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*. Il reste actif jusqu'à un âge avancé, allant même, en 1920, à 80 ans présenter au Congrès international des mathématiciens de Strasbourg un important mémoire sur la classification des constellations célestes.

Son œuvre en théorie des groupes est capitale ; on lui doit la notion de groupe quotient. Il est le premier à ajouter des éléments importants à la théorie de Galois sur les équations algébriques. Portent son nom, en théorie des groupes, les suites de Jordan-Hölder qui permettent de dévisser les groupes, la réduction de Jordan des matrices. Il est aussi le premier à parler de groupes infinis. Son grand ouvrage *Traité des substitutions et des équations algébriques* (1870), qui fait le point de la question, a une très grande influence, mais à l'étranger presque uniquement.

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \alpha & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

Matrice de Jordan : soit $q_A(t) = (t - \alpha)^e$ pour tout $\alpha \in k, e \geq 1$. Supposons que E soit isomorphe à $k[t]/(q)$. Alors E a une base sur k telle que la matrice de A relative à cette base sera celle ici représentée.

Soit G un groupe, et soit

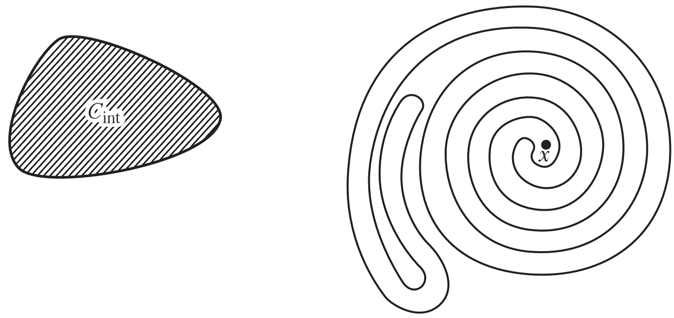
$$G = G_1 \supset G_2 \supset \cdots \supset G_r = \{e\}$$

une suite strictement décroissante de sous-groupes telle que chaque sous-groupe G_i soit normal dans G_{i+1} et que le groupe quotient G_i/G_{i+1} soit simple. Alors, toute autre suite de sous-groupes ayant la même propriété est équivalente à celle de départ.

La suite de Jordan-Hölder.

Son *Cours d'analyse* (1883) a contribué à former des générations de mathématiciens, et ce dans tous les pays. Ce traité est une mise au point de l'analyse classique, qui annonce à bien des égards l'analyse moderne et lui prépare royalement la voie.

Jordan est parmi les premiers à mettre en forme explicite la géométrie euclidienne en dimension quelconque. En géométrie, éternels sont désormais les notions de courbe de Jordan et, surtout, le théorème de Jordan. Il fait partie des prémices de la topologie algébrique. Une courbe de Jordan correspond à l'idée classique de la ligne géométrique. Formulées par lui dans le langage alors utilisable, ce sont les courbes d'ensembles de points dont les coordonnées sont des fonctions continues prenant toutes les valeurs d'un intervalle fermé. Jordan est également un précurseur des travaux de Borel et de Lebesgue en théorie de la mesure.

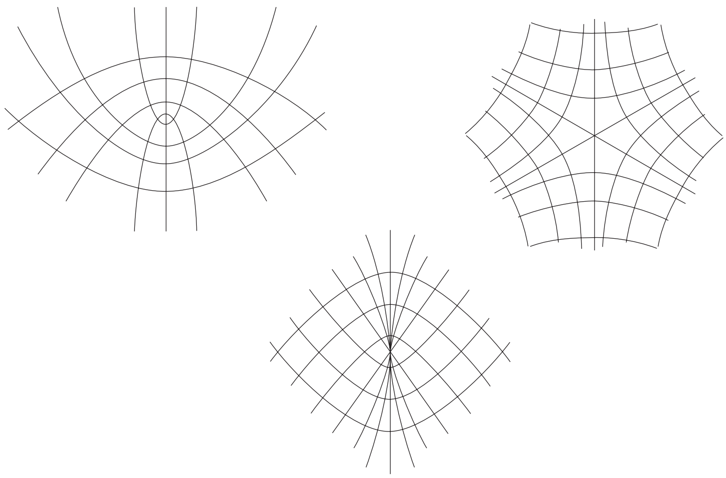


Le théorème de Jordan dit qu'une courbe fermée simple du plan partage ce plan en deux régions : son intérieur et son extérieur. Ce théorème semble évident à l'homme de la rue, alors qu'il ne l'est pas du tout. La figure de droite montre déjà que les choses ne sont pas si simples. Quant à la démonstration, elle n'est jamais facile. C'est en fait le premier de tous les théorèmes de la topologie (si l'on excepte la formule d'Euler pour les polyèdres).

Principalement géomètre, mais aussi analyste et administrateur, ***Jean-Gaston Darboux*** (Le Bourget 1842, Bruxelles 1917) demeure aujourd'hui encore « l'homme de la théorie des surfaces ». Il publie en effet un grand traité en quatre volumes intitulé *Théorie des surfaces*, traité qui n'a pas encore perdu de son actualité et reste une référence de base pour de nombreuses questions.

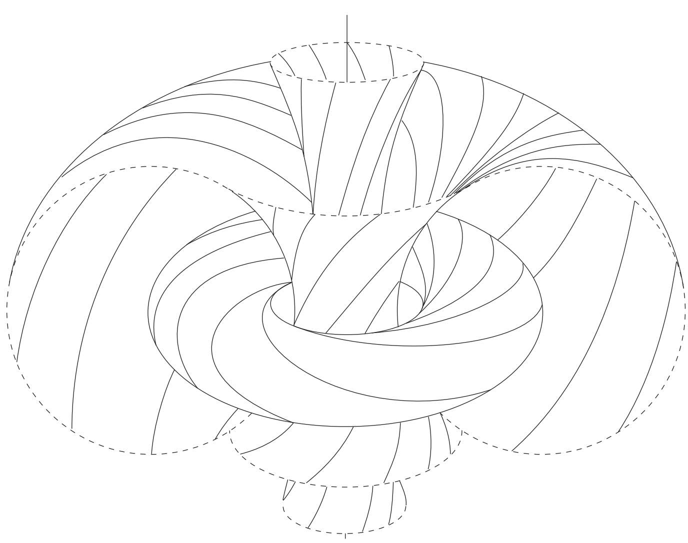
Par essence, Darboux est un géomètre analytique, utilisant les coordonnées et très soucieux de démonstrations parfaites. Il approfondit pour ce faire l'équation dite aujourd'hui de Monge-Ampère, qui reste un sujet clef en EDP. On lui doit en analyse, dans la théorie de l'intégration, la notion de somme de Darboux. Il semble qu'il ait quitté l'analyse parce qu'il s'intéressait trop aux fonctions sans dérivée, ce qui alors n'était pas très apprécié en France (c'est l'époque d'Hermite). Il devient un spécialiste incontournable de la théorie des surfaces. Avec Ribaucour, il introduit la notion de trièdre mobile sur une surface, notion qui apparaît ensuite dans une foule de contextes et reste fondamentale aujourd'hui (elle fut généralisée systématiquement par Élie Cartan). On lui doit l'étude des systèmes triples orthogonaux. Il est enfin l'un des premiers à avoir osé aborder la déformation des surfaces, sujet largement ouvert, qui demeure aujourd'hui encore, d'une difficulté redoutable.

Sa classification de la structure des lignes de courbure d'une surface au voisinage d'un ombilic est le premier prélude aux travaux sur la généricité (Whitney, Thom...). Expliquons que si l'on n'inclut pas la généricité, c'est-à-dire pratiquement la stabilité, sous les petites déformations, le problème n'a aucun sens et l'on peut alors trouver « n'importe quelle figure ».



Les trois formes génériques des lignes de courbure autour d'un ombilic.

Depuis une date incertaine — apparemment certains sculpteurs du Moyen Âge en connaissaient certains, mais Villarceau (1813–1883, astronome de position, on trouve une rue à son nom à Paris) fut le premier à l'écrire — il existe sur les tores de révolution deux autres familles de cercles différentes des méridiens et des parallèles. Ils ont des propriétés merveilleuses, coupent les méridiens sous un angle constant, et dans une même famille sont deux à deux enlacés. Roger Penrose les relie même à la structure de l'univers.



Cercles de Villarceau dessinés sur des tores engendrés par la rotation des cercles d'un faisceau autour d'un axe.

Darboux étudie toutes les surfaces analogues, qu'il appelle cyclides. Plus généralement, il résout le problème de savoir combien de cercles, voire de coniques, une surface peut porter. On trouve ainsi jusqu'à six familles possibles. Quant à la surface dite surface romaine de Steiner, Darboux montre que c'est la seule (hormis les sphères, évidemment) à posséder une double infinité continue de coniques.

La surface « romaine » de Steiner.

Pour certains, le dernier savant universel est ***Henri Poincaré*** (Nancy 1854, Paris 1912). Il est l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps et reste toujours d'actualité. Dominant toutes les branches des mathématiques, son œuvre reste d'une jeunesse étonnante. Il est le cousin de Raymond Poincaré, qui fut président du Conseil (celui du « franc Poincaré »). Président de l'Académie des sciences, il est reçu en 1908 à l'Académie française, alors que son cousin, qui est aussi candidat, échoue. C'est lui que l'on préfère (pour des raisons politiques), mais Raymond y entrera l'année suivante. Poincaré n'était pas un bon dessinateur : l'École polytechnique, en 1873, le reçoit premier, avec le plus fort total de tous les temps

(3 905 sur 4 000), mais, en théorie, elle aurait dû l'éliminer, sa note de lavis (il est facile de faire dégouliner ce qui s'appelait élégamment le « jus ») de 1 sur 20 étant éliminatoire !

Résumons brièvement :

Poincaré fonde la topologie algébrique,
fonde la théorie globale des systèmes dynamiques,
révolutionne la mécanique céleste,
apporte des lumières essentielles dans les géométries non euclidiennes en fournissant deux modèles du plan hyperbolique,
fait faire à la théorie des groupes des progrès décisifs en introduisant ceux qu'il appelle fuchsiens, mais que tous ceux qui en parlent préféreraient appeler groupes de Poincaré,
joue un rôle clef dans la création de la relativité restreinte.

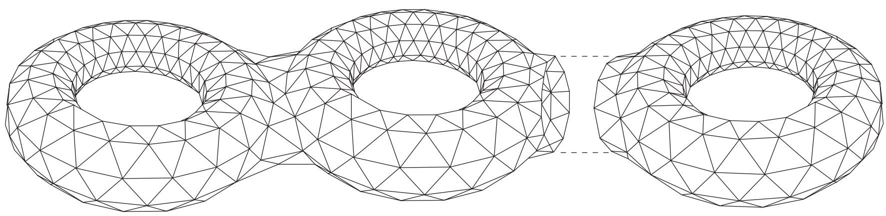
Mais il est aussi l'un des très rares grands mathématiciens, avec Hadamard (voir Hadamard, 1959) à avoir derrière lui une œuvre importante d'épistémologie : deux ouvrages restent encore d'actualité et servent de base aux épistémologues (Poincaré, 1902 ; Poincaré, 1905). Un numéro spécial de *Pour la science*, dans la série « Les génies de la science », lui est consacré (Bottazini, 2000).

Si grande est son œuvre que, pour ne pas la trahir, nous nous contenterons d'en évoquer les différentes composantes par des illustrations brièvement légendées. Nous ne parlerons pas de ses travaux de physique mathématique (figures d'équilibre des masses fluides en rotation, théorie de la formation de la Lune, et bien d'autres).

1 La topologie algébrique moderne

La topologie algébrique est l'étude des propriétés des objets géométriques qui sont indépendantes de leur déformation, d'une variation continue. Le premier résultat connu est celui de la formule d'Euler pour les polyèdres. Poincaré introduit le groupe fondamental d'un espace topologique (le groupe des classes de courbes fermées continues déformables l'un dans l'autre) : c'est un invariant facile à définir et qui reste incontournable. La célèbre conjecture de Poincaré, toujours ouverte à ce jour (mais peut-être en passe d'être bientôt résolue), est que toute variété compacte de dimension 3 et qui n'a pas de groupe fondamental (précisément un groupe réduit à l'unité) doit être une sphère (de dimension 3).
Il va beaucoup plus loin : il réussit à définir pour un objet géométrique de dimension n quelconque des invariants topologiques pour toutes les dimensions

intermédiaires de 0 à n. Ces invariants généralisent ce que sont pour les polyèdres (alors $n=2$), en dimension 0, le nombre de sommets, en dimension 1, le nombre d'arêtes, en dimension 2, le nombre de faces. La formule d'Euler s'étend alors en dimension quelconque et pour tous les objets qui sont topologiquement des polyèdres ; elle est dite d'Euler-Poincaré. Peu de mathématiciens savent que la démonstration d'Euler (même pour les seuls polyèdres) était incomplète ; la première démonstration complète est due à Von Staudt en 1840.



Pour une surface ayant g trous, et pour toute triangulation de cette surface, on a toujours l'égalité suivante entre le nombre de sommets s, le nombre d'arêtes a et le nombre de triangles f :
$s - a + f = 2\,(1 - g)$. En particulier, quand il n'y aucun trou ($g = 0$), par exemple pour une surface convexe, ou plus généralement du type topologique de la sphère, on retrouve la célèbre formule d'Euler pour les polyèdres :
$s - a + f = 2$. Pour le cas du tore (ayant donc un trou, $g = 1$), on trouve :
$s - a + f = 0$

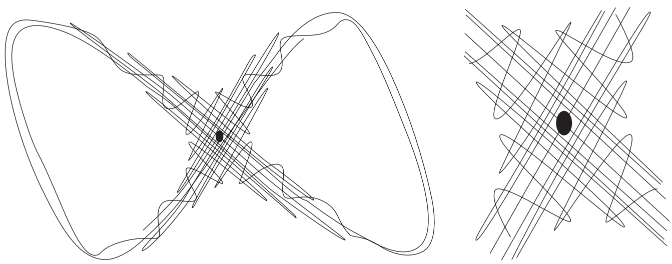
2 La théorie globale des systèmes dynamiques

Dès que l'on a trois corps ou plus dans un système régi par l'attraction newtonienne, on ne sait pas résoudre les équations de leur mouvement explicitement ; il faut se contenter d'une étude qualitative. Mais évidemment, en échange, on peut espérer connaître le comportement à long terme, lorsque le temps devient « très grand » (voir ainsi le récent texte sur la stabilité du système solaire, Laskar, 1989). Mû par son désir de recherches en mécanique céleste, Poincaré est le premier à se lancer dans une telle étude : « Tout le monde est intéressé à prédire l'avenir. » Pour des systèmes généraux, mais clos, c'est-à-dire qui ne peuvent pas aller à l'infini, à la condition que les volumes du système soient conservés, il découvre le théorème de récurrence de Poincaré : une trajectoire quelconque reviendra toujours, si l'on attend assez longtemps, aussi près que l'on veut de chacun des états qu'elle a pris (au début, par exemple, mais aussi plus tard, n'importe quand). Ce principe de récurrence donnera lieu à plusieurs controverses, en particulier en liaison avec la relativité restreinte (Bottazini, 2000).

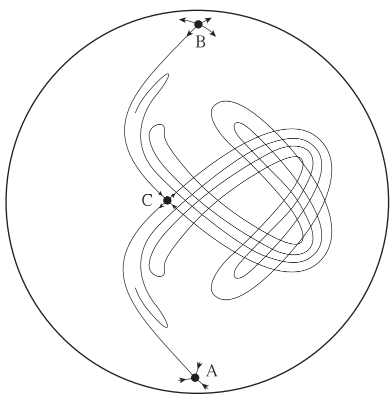
Comme l'écrit Dieudonné, Poincaré crée *ex nihilo* la théorie globale des équations différentielles dans le domaine réel.

3 La mécanique céleste

Fort de ses résultats sur les systèmes dynamiques, il montre que le problème des trois corps est très subtil. Il réalise une étude complètement nouvelle de ce qui se passe pour une orbite voisine d'une orbite périodique.

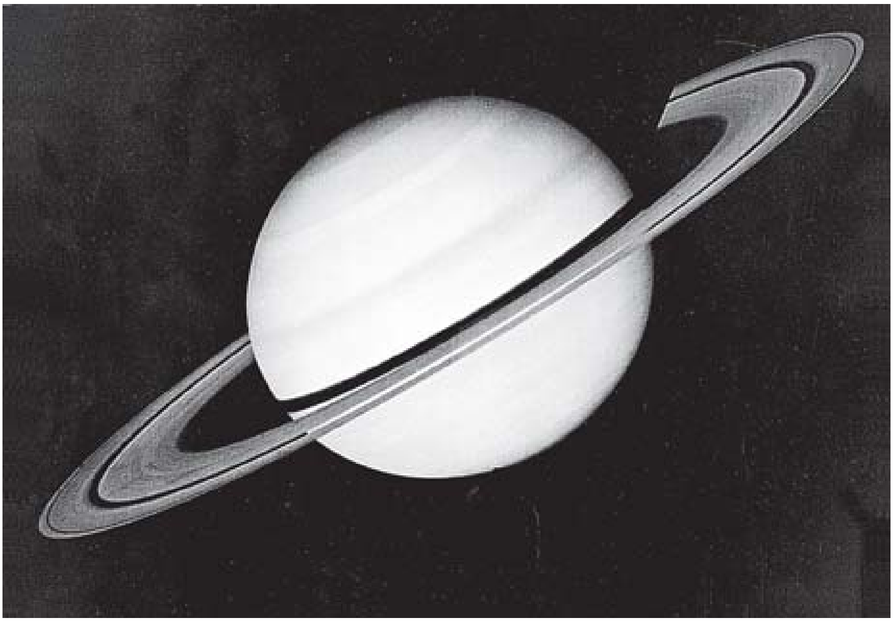


Dans un système de trois corps régis par les lois de la mécanique céleste, il existe, au voisinage d'une trajectoire périodique, des trajectoires qui s'en approchent infiniment près. Leur enchevêtrement traduit l'extraordinaire complexité du problème des trois corps. La figure ci-dessous est remarquable par sa nouveauté et fait maintenant partie du bagage classique des mathématiciens. Poussée plus avant par Smale, c'est la figure dite du « fer à cheval ».



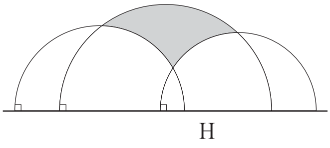
Le « fer à cheval » de Smale.

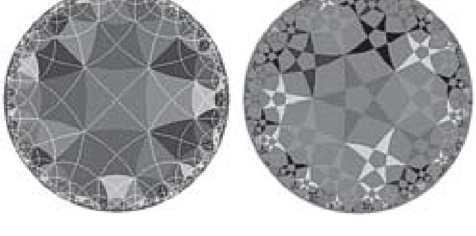
Continuant ses recherches, Poincaré étudie, on l'a dit, le problème métaphysiquement lancinant de la stabilité du système solaire. Il est l'un des précurseurs des théories de Thom. Il explique également très bien la stabilité des anneaux de Saturne.

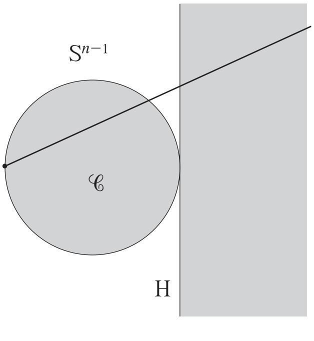


Les études sur la stabilité de Poincaré s'appliquent à des problèmes de dynamique céleste, comme la stabilité des anneaux de Saturne et celle du système solaire en général.

4 Les géométries non euclidiennes







Les deux figures « en cercle » sont des représentations dans le modèle du « disque de Poincaré », la figure restante se situant dans le modèle appelé « demi-plan de Poincaré ». Ces deux modèles, pour le même objet mathématique, sont indispensables, selon le type de problème que l'on doit traiter.

Les « droites » dans le demi-plan de Poincaré ; et comment passer du disque au demi-plan

5 Théorie des groupes et groupes fuchsiens

Sa motivation est d'étudier plus avant les ODE (équations différentielles ordinaires), pour lesquelles on connaît mal le comportement des solutions. Poincaré découvre pour ces groupes ce que Klein cherchait désespérément, Klein faisant, on l'a dit, une dépression assez grave. Poincaré utilise pour ces résultats sa vision profonde de la géométrie hyperbolique.

6 La relativité restreinte

Poincaré travaille sur la relativité restreinte. Ses relations avec Einstein sont cependant assez compliquées (Bottazini, 2000). Actuellement, les contributions respectives de Poincaré et d'Einstein à la théorie de la relativité restreinte sont très étudiées. Nous pensons pour notre part qu'il faut attendre des recherches historiques impartiales avant de tirer des conclusions hâtives.

Charles-Émile Picard (Paris 1856–1941), mathématicien, est aussi médecin. En théorie des fonctions holomorphes, il donne deux théorèmes, dont la compréhension profonde et la généralisation (théorie de Picard) restent toujours d'actualité. On dit couramment, entre spécialistes, petit théorème de Picard et grand théorème de Picard.

En géométrie algébrique, il donne son nom à un objet essentiel, indispensable, la variété de Picard d'une variété algébrique.

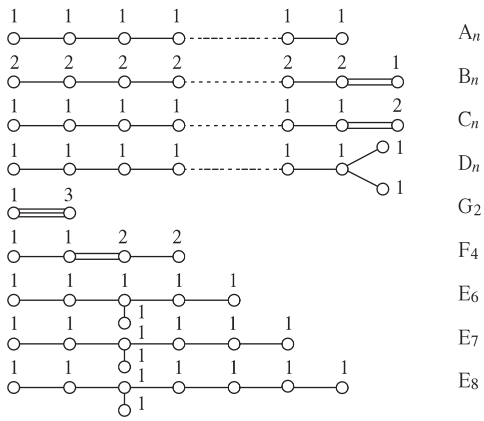
Dans les fondements de l'analyse, il introduit une méthode bien meilleure que celle de Cauchy pour résoudre des équations différentielles ordinaires, par approximations successives ; ce qui entraînera des généralisations importantes. Le schéma de fonctionnement mis au point par Picard s'applique en fait dans des cas très généraux, et même dans les dimensions infinies. Les conditions pour que cette méthode marche en dimension infinie n'ont été obtenues que récemment. Picard applique en particulier sa méthode aux EDP.

René Baire (Paris 1874, Chambéry 1932) est le premier nom de ce que Gustave Choquet appelle le trio de l'intégration, avec Lebesgue et Borel. Il découvre le concept d'ensemble maigre, et une propriété de base que peut posséder un espace topologique : « Toute intersection dénombrable d'ouverts partout denses reste partout dense. » Les maigres sont, quant à eux, les ensembles complémentaires (ce qui reste quand on a ôté ce qui appartient aux autres). Il faut bien voir que ce théorème de Baire n'est pas seulement théorique, mais fournit un théorème d'existence, capital par exemple dans l'œuvre d'Herman.

Louis Bachelier (1870–1946) est le fondateur des mathématiques boursières. Sa thèse de 1900, « Théorie de la spéculation » (parue aux *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*), est incontournable. Son nom est encore connu dans toutes les salles de marché boursier, comme, entre autres, l'équation de Black-Scholes ou le calcul de Malliavin. Le président du jury de sa thèse était Poincaré, qui ne s'est pas trompé sur son importance. Bachelier est aussi un précurseur, avant Einstein, Wiener et Paul Lévy, du mouvement brownien.

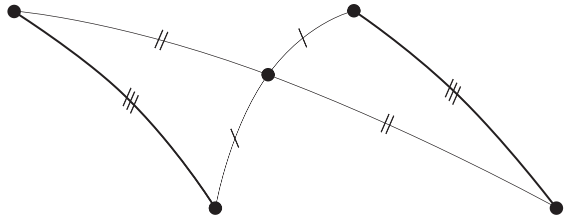
Le grand géomètre français d'entre les deux guerres, le père de la géométrie différentielle moderne (celui qui sut réunir les idées de Klein et Riemann), est ***Élie Cartan*** (Dolomieu 1869, Paris 1951). C'est le père d'Henri Cartan, que nous retrouverons plus loin. Ils ont même publié, en 1931, un article en commun sur les fonctions de plusieurs variables complexes. Comme on le verra aussi pour Paul Lévy, Élie Cartan n'a pas eu l'influence qu'il aurait dû avoir en France ; il était trop en avance, et la jeunesse du pays était décimée. Ses collègues de la Sorbonne étaient assez passéistes et presque tous le sous-estimaient.

Élie Cartan a produit sans discontinuer des résultats de base à la fois en algèbre, en analyse, en géométrie et en physique mathématique. L'un des objets qui le motivent est celui des groupes de Lie. Avec l'Allemand Hermann Weyl, Élie Cartan construit presque de toutes pièces leur théorie. Il fonde la théorie des groupes infinis, mélange parfait d'analyse et d'algèbre. Cette théorie (et la classification des rares cas possibles), très difficile et prophétique, ne sera reprise qu'à partir des années 1960 par Guillemin, Singer, Sternberg *et alii*. Un groupe de Lie est quant à lui un objet-groupe, c'est-à-dire qui possède une opération de multiplication raisonnable, et en même temps un objet qui possède une structure différentiable, c'est-à-dire qui a un espace tangent partout, de même qu'une tangente pour une courbe, un plan tangent pour une surface, etc. L'extraordinaire est que la seule conjonction de ces deux propriétés entraîne pour leurs possesseurs énormément de propriétés ; ils deviennent très riches et donc, en un certain sens, rares, disons pratiquement « classables ». À l'opposé, nous verrons chez Gromov des groupes discrets (dont la théorie, la classification est finalement beaucoup plus subtile, « infinie », et encore incomprise) composés de points (des points certes en nombre éventuellement infini, mais vraiment séparés les uns des autres). Ces groupes de Lie se rencontrent pratiquement partout, et énormément en physique (dans le groupe de nos espaces habituels, mais aussi en relativité restreinte, etc.). Cartan fait une classification complète des pièces de base des groupes de Lie, les groupes indécomposables (le nom technique est groupes simples) ; il a pour cela introduit un concept aujourd'hui essentiel dans les objets géométriques de base que sont les groupes engendrés par des réflexions : le concept d'entier de Cartan. Nous retrouverons ces nombres entiers à propos de Tits. Mais il réussit également, avant le changement de siècle, à classer pour ceux-ci toutes leurs représentations linéaires (en dimension finie). C'est dans cette classification des représentations qu'il rencontre les spineurs, aujourd'hui l'une des clefs de la physique des particules et de la mécanique quantique. Il a aussi commencé à étudier la topologie algébrique de ces groupes de Lie simples.



Les diagrammes dits de Dynkin (ou encore schémas) donnent la liste complète (faite par Élie Cartan) des groupes de Lie simples. On y voit quatre séries infinies (dépendant de l'entier positif n) et cinq groupes isolés, dits exceptionnels. Il s'agit du cas complexe. Dans le cas réel, on trouve une classification un peu plus longue, mais toujours avec des séries indexées par un entier, en nombres finis. Les nombres $1,\ 2,\ 3$ qui figurent dans ces diagrammes sont appelés entiers de Cartan. Ils sont associés à l'angle entre les deux vecteurs associés aux traits correspondants. On retrouvera les entiers de Cartan, entre autres, chez Tits.

La contribution la plus spectaculaire d'Élie Cartan est celle du concept d'espace symétrique. Il s'agit d'objets géométriques qui, à part le fait d'être raisonnablement doux (par exemple d'avoir un espace tangent), sont symétriques autour de chacun de leurs points. L'extraordinaire est que cette seule condition ne laisse place qu'à très peu d'objets, à peine plus nombreux que les groupes de Lie simples ; ce sont certaines paires de groupes de Lie. Première remarque : les espaces symétriques, apparemment purs objets géométriques, se retrouvent en algèbre et en analyse ; ils sont à la racine d'un nœud très dense dans l'ensemble des mathématiques. Seconde remarque, faite de plus haut : Élie Cartan s'est intéressé assez tôt aux espaces symétriques, mais c'est seulement à l'âge de 59 ans qu'il réussit à les classer et les étudier à fond ; il montre notamment qu'ils sont en correspondance biunivoque avec les différents groupes de Lie réels simples non compacts ; c'est l'un des très rares, avec entre autres André Weil, Hermite et Siegel, à avoir élaboré des concepts aussi profonds à un tel âge.



Un espace est dit symétrique quand la figure est vraie en chacun de ses points, c'est-à-dire que la symétrie par rapport à chaque point respecte les distances (comme dans l'espace euclidien ordinaire).

Type I

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{k}$	dim M	Condition
$\mathfrak{su}(p+q)$	$\mathfrak{su}(p)\oplus\mathfrak{su}(q)\oplus\mathbb{R}$	$2pq$	$1\leqslant p\leqslant q$
$\mathfrak{su}(n)$	$\mathfrak{so}(n)$	$\frac{(n-1)(n+2)}{2}$	$3\leqslant n$
$\mathfrak{su}(2n)$	$\mathfrak{sp}(n)$	$(n-1)(2n+1)$	$2\leqslant n$
$\mathfrak{so}(2n)$	$\mathfrak{su}(n)\oplus\mathbb{R}$	$n(n-1)$	$5\leqslant n$
$\mathfrak{so}(p+q)$	$\mathfrak{so}(p)\oplus\mathfrak{so}(q)$	pq	$1\leqslant p\leqslant q$ $7\leqslant p+q$
$\mathfrak{sp}(n)$	$\mathfrak{su}(n)\oplus\mathbb{R}$	$n(n+1)$	$2\leqslant n$
$\mathfrak{sp}(p+q)$	$\mathfrak{sp}(p)\oplus\mathfrak{sp}(q)$	$4pq$	$1\leqslant p\leqslant q$
G_2	$\mathfrak{su}(2)\oplus\mathfrak{su}(2)$	8	
F_4	$\mathfrak{so}(9)$	16	
F_4	$\mathfrak{sp}(3)\oplus\mathfrak{su}(2)$	28	

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{k}$	dim M
E_6	$\mathfrak{su}(6)\oplus\mathfrak{su}(2)$	40
E_6	$\mathfrak{so}(10)\oplus\mathbb{R}$	32
E_6	$\mathfrak{sp}(4)$	42
E_6	F_4	26
E_7	$\mathfrak{su}(8)$	70
E_7	$\mathfrak{so}(12)\oplus\mathfrak{su}(2)$	64
E_7	$E_6\oplus\mathbb{R}$	54
E_8	$\mathfrak{so}(16)$	128
E_8	$E_7\oplus\mathfrak{su}(2)$	112

Type III

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{k}$	dim M	Condition
$\mathfrak{su}(p+q)$	$\mathfrak{su}(p)\oplus\mathfrak{su}(q)\oplus\mathbb{R}$	$2pq$	$1\leqslant p\leqslant q$
$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$	$\mathfrak{so}(n)$	$\frac{(n-1)(n+2)}{2}$	$3\leqslant n$
$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{H})$	$\mathfrak{sp}(n)$	$(n-1)(2n+1)$	$2\leqslant n$
$\mathfrak{so}(n,\mathbb{H})$	$\mathfrak{su}(n)\oplus\mathbb{R}$	$n(n-1)$	$5\leqslant n$
$\mathfrak{so}(p,q)$	$\mathfrak{so}(p)\oplus\mathfrak{so}(q)$	pq	$1\leqslant p\leqslant q$ $7\leqslant p+q$
$\mathfrak{sp}(n)$	$\mathfrak{su}(n)\oplus\mathbb{R}$	$n(n+1)$	$2\leqslant n$
$\mathfrak{sp}(p,q)$	$\mathfrak{sp}(p)\oplus\mathfrak{sp}(q)$	$4pq$	$1\leqslant p\leqslant q$
G_2^2	$\mathfrak{su}(2)\oplus\mathfrak{su}(2)$	8	
F_4^{-20}	$\mathfrak{so}(9)$	16	
F_4^4	$\mathfrak{sp}(3)\oplus\mathfrak{su}(2)$	28	

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{k}$	dim M
E_6^2	$\mathfrak{su}(6)\oplus\mathfrak{su}(2)$	40
E_6^{-14}	$\mathfrak{so}(10)\oplus\mathbb{R}$	32
E_6^6	$\mathfrak{sp}(4)$	42
E_6^{-26}	F_4	26
E_7^7	$\mathfrak{su}(8)$	70
E_7^{-5}	$\mathfrak{so}(12)\oplus\mathfrak{su}(2)$	64
E_7^{-25}	$E_6\oplus\mathbb{R}$	54
E_8^8	$\mathfrak{so}(16)$	128
E_8^{-24}	$E_7\oplus\mathfrak{su}(2)$	112

Le classement des espaces symétriques.

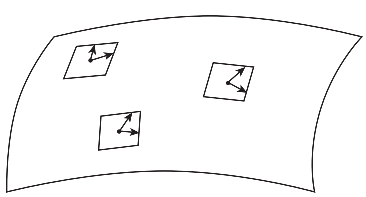
Mais il est aussi l'un des fondateurs de la géométrie riemannienne moderne, travaillant sur les variétés différentielles (sans préciser leur définition complète, c'est par trop évident pour lui, mais en élargissant le cadre proprement riemannien au cas complexe et au cas projectif ; voir Cartan, 1928).

Par son étude des connexions générales, il fonde toute une kyrielle de géométries. En outre, cette théorie des connexions fonde une partie de la physique mathématique, car il est nécessaire en physique de pouvoir comparer des espaces en des endroits et des moments variés. On peut dire, à la suite d'Atiyah, que la théorie des connexions, avec les travaux de Ricci et Levi-Civita, réconcilie les points de vue antagonistes de la géométrie : ceux de Riemann et ceux de Klein. Cartan met Riemann sur la base et Klein sur la fibre. La théorie des espaces fibrés sera mise au point par Steenrod et Ehresmann.

Une partie de ces travaux ont servi en théorie de la relativité générale. Il y eut d'ailleurs une assez longue correspondance épistolière entre Cartan et Einstein, publiée dans Debever (1979).

$$\mathrm{d}\omega^i = \left[\omega^k\, \omega_k^i\right], \Omega_i^j = \mathrm{d}\omega_i^j - \left[\omega_i^k\, \omega_k^j\right],$$
$$\Omega_i^j = (1/2)\, \mathrm{R}_{ikh}^j \left[\omega^k\, \omega^h\right]$$

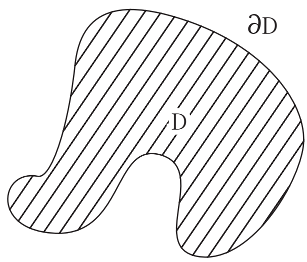
Si l'on écrit la métrique riemannienne étudiée comme $\mathrm{d}s^2 = g_{ij}\, \omega^i \omega^j$ (avec la convention d'Einstein de faire la somme, sans l'écrire, entre deux indices quand ils figurent simultanément en indice supérieur et en indice inférieur, alors on trouvera la courbure de Riemann en différenciant deux fois (au sens de Cartan de la différentielle extérieure des formes) de cette manière.



Des repères mobiles. La technique du repère mobile consiste, au lieu de prendre les coordonnées habituelles, à prendre en chaque point un repère de l'espace tangent, que l'on choisit habilement selon le problème géométrique que l'on désire étudier.

Toutes ces études ont pu être réalisées grâce à la technique inventée par Élie Cartan, celle du repère mobile. Cette technique apparaît constamment en physique mathématique.

Cette réconciliation ne peut se faire sans nouveau concept : celui de connexion infinitésimale. Et pour ce faire, il faut introduire un nouveau calcul infinitésimal, présent avant lui sous des formes variées (équation de Maxwell, par exemple), mais peu claires. C'est le calcul différentiel extérieur, qui utilise les notions de formes différentielles de tout degré, et de différentielle extérieur de ces formes. Tout cela fait partie aujourd'hui du bagage de base de la géométrie différentielle, et par contrecoup de la topologie algébrique, plus précisément de sa partie appelée topologie différentielle. En physique, c'est aussi le formalisme de Cartan qui permet de bien comprendre l'écriture des équations de Maxwell pour l'électromagnétisme.



La formule de Stokes sous sa forme actuelle généralise des formules de Gauss, de Riemann, d'Ostrogradski, et s'écrit très limpidement avec la notation de Cartan :

$$\int_{\mathrm{D}} \mathrm{d}\omega \;=\; \int_{\partial \mathrm{D}} i^{*}\omega$$

Son intérêt essentiel est de relier ce qui se passe à l'intérieur d'un domaine D avec ce qui se passe sur la seule frontière $\partial\mathrm{D}$ de ce domaine.

Élie Cartan étant aussi algébriste, on lui doit la notion (si simple ! mais fondamentale en algèbre commutative) d'idéal bilatère. Le théorème attribué à Wedderburn lui appartient aussi, ainsi qu'à Mollien : il s'agit de montrer que certaines algèbres spéciales sont en fait très peu nombreuses, que ce sont toujours des algèbres de matrices et qu'on les connaît en réalité fort bien.

Cartan est enfin le premier à comprendre que les probabilités géométriques sont un problème de mesures invariantes sur les espaces homogènes.

Mathématicien complet, ***Jacques Salomon Hadamard*** (Versailles 1865, Paris 1963) est aussi un expert international en fougères (comme son double gendre Laurent Schwartz le sera en papillons).

Après trois années d'enseignement au lycée Buffon, il est professeur à Bordeaux de 1897 à 1909, à Polytechnique de 1912 à 1937 et parallèlement au Collège de France, enfin à l'École centrale de 1920 à 1934. Durant ses années au lycée Buffon, il rédige un cours de géométrie qui se distingue des ouvrages classiques par sa rigueur et ses largeurs de vue, même s'il déborde des programmes (Hadamard, 1898–1901). Deux autres livres importants, celui qui fonda le sujet, capital aujourd'hui, appelé analyse fonctionnelle (Hadamard, 1910), et son livre sur la propagation des ondes (Hadamard, 1903) qui reste un classique incontournable. Nous ne parlerons que brièvement, faute de place, de ce mathématicien hors pair, à l'exception de deux de ses contributions les plus spectaculaires, l'une en analyse, l'autre en géométrie. On a vu plus haut que le séminaire d'Hadamard au Collège de France fut le seul endroit où André Weil pouvait trouver des mathématiques « intéressantes ». Hadamard est l'un des rares à avoir « philosophé » sur la recherche en mathématiques ; son livre (Hadamard, 1959) reste aujourd'hui la référence de base. On pourra y ajouter les deux ouvrages de Poincaré mentionnés plus haut, ainsi que celui, très bref mais percutant de Leray (1967). On lira également le texte issu du même ouvrage (Lichnerowicz, 1967), consacré aux mathématiques et à la réalité. Un grand ouvrage vient de lui être entièrement consacré (Maz'ya et Shaposhnikova, 1998).

Il se rend vite célèbre quand il démontre en 1886, parallèlement avec de la Vallée-Poussin, la conjecture de Gauss (très longtemps attendue) sur la répartition des nombres premiers.

> Le nombre $\mathrm{Prim}(x)$ de nombres premiers inférieurs ou égaux à un réel x donné est équivalent, lorsque x tend vers l'infini, à $x/\log x$, c'est-à-dire que :
>
> $$\lim_{x \to \infty} \frac{\mathrm{Prim}(x)}{x/\log x} = 1$$

Cette approche utilise les nombres complexes, sur lesquels il a déjà publié de nombreuses contributions, notamment sur le théorème des trois cercles. On lui doit le célèbre adage (déjà cité) : « Le plus court chemin entre deux points du domaine réel passe souvent par le domaine complexe. » Son approche pour la répartition des nombres premiers sera pratiquement à la base de tous les efforts ultérieurs pour démontrer la fameuse hypothèse de Riemann. Avant la démonstration du théorème de Fermat par Wiles en 1994, c'était l'une des trois grandes conjectures en chantier avec celle de Poincaré. Il ne reste donc plus que deux grandes conjectures, disons « classiques ». Encore qu'il se puisse que la conjecture de Poincaré soit bientôt démontrée. Par contre, l'hypothèse de Riemann n'a encore connu aucune approche globale sérieuse. Il faut savoir que sa véracité entraînerait toute une suite de conséquences remarquables, tant en théorie des nombres qu'en physique mathématique. La première conséquence serait une estimée du second terme après $x/\log x$ (ces seconds termes sont classiquement toujours très difficiles dans tous les développements asymptotiques délicats) dans le comportement asymptotique de $\mathrm{Prim}(x)$. Les deux conjectures font l'objet de l'un des prix Clay d'un million de dollars. On verra que Weil a déjà démontré l'hypothèse de Riemann pour les corps finis.

La fonction zêta (ζ) est la somme de la série infinie :

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} \quad \text{où la somme porte sur tous les nombres entiers.}$$

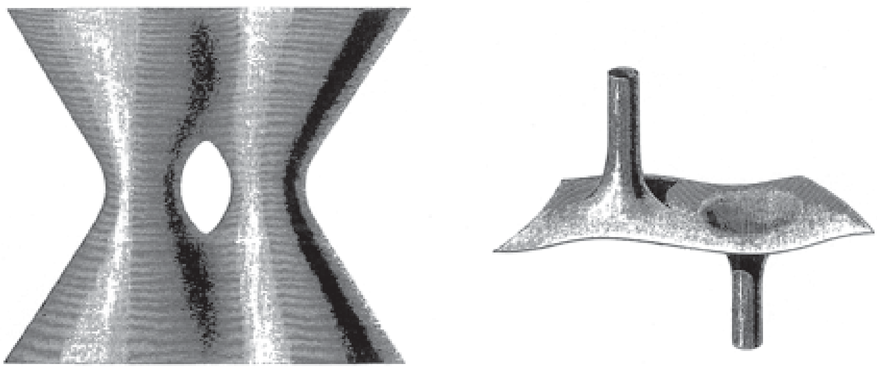
Pour les puissances s qui sont des nombres réels, on sait calculer explicitement ses valeurs en des s qui sont des nombres entiers positifs. La création fondamentale de Riemann est de considérer $\zeta(s)$ pour des nombres s complexes. Par ce que l'on appelle la technique du prolongement analytique, on peut arriver à donner une valeur à $\zeta(s)$ pour toute valeur complexe, sauf $s = 1$. L'hypothèse de Riemann est que cette fonction $\zeta(s)$, dans le domaine complexe, n'a de zéros (ne s'annule) que sur la droite que forment les points complexes de la forme $z = x + iy$, lorsque $x = 1/2$. Cette hypothèse est très difficile à vérifier, disons plutôt à supporter, numériquement. En effet, les zéros apparaissent souvent par paires, et pour des valeurs de y extrêmement rapprochées. On est allé, dans les calculs, jusqu'aux 200 premiers milliards de zéros ; le sujet est fascinant, car accessible par ordinateur (au moins à titre de vérification primaire). Un site de la Toile est consacré exclusivement à ces calculs, <http://www.zetagrid.net>, d'où nous avons extrait le tableau suivant :

année	auteur	premier zéro	nombre de zéros ρ avec $\mathrm{Im}(\rho) > 0$
1955	D.H. Lehmer	0	10 000
1956	D.H. Lehmer	0	25 000
1958	N.A. Meller	0	35 337
1966	R.S. Lehman	0	250 000
1968	J.B. Rosser, J.M. Yohe, L. Schoenfeld	0	3 500 00
1977	R.P. Brent	0	40 000 000
1979	R.P. Brent	0	81 000 001
1982	R.P. Brent, J. van de Lune, H.J.J. te Riele, D.T. Winter	0	200 000 001
1983	J. van de Lune, H.J.J. te Riele	0	300 000 001
1986	J. van de Lune, H.J.J. te Riele, D.T. Winter	0	1 500 000 001
1989	A.M. Odlyzko	10^{20}	70 000 000
1992	A.M. Odlyzko	10^{20}	175 000 000
2001	A.M. Odlyzko	10^{22}	10 000 000 000
2001	J. van de Lune	0	10 000 000 000
2002	A.M. Odlyzko	10^{23}	20 000 000 000
2002	S. Wedeniwski	0	75 000 000 000
2003	S. Wedeniwski	0	200 000 000 000

Les premiers zéros de la fonction ζ : calculs selon les mathématiciens et nombre de zéros calculés jusqu'à ce jour.

En géométrie, avec un état d'esprit entièrement différent, Hadamard a apporté des contributions fondamentales en théorie des surfaces, mais surtout pour celles à courbure négative (où tous les points ont l'allure d'un col de montagne et traversent localement leur plan tangent en deux courbes distinctes). Sa motivation était « à la Poincaré », c'est-à-dire l'étude des systèmes dynamiques, de la mécanique, voire du système solaire ! Il découvrit que les mouvements sur ces surfaces (ce sont les trajectoires dites géodésiques) peuvent avoir un comportement global complètement chaotique. Il est donc bien le réel fondateur du *chaos*. On a vu que le chaos se trouve aussi, quoique de façon un peu différente, chez Poincaré. Quant à son article sur le billard dans le triangle hyperbolique, souvent cité, il ne figure même pas dans ses *Œuvres complètes*, ce qui explique aussi sa reconnaissance très tardive comme l'un des fondateurs du chaos. On trouvera dans *Chaos et déterminisme* (Dahan Dalmedico, Chabert *et alii*, 1992) une superbe description de ce comportement des géodésiques dans les surfaces décrites par Hadamard. Le chaos est très à la mode, et parfois mal compris. Un ouvrage excellent et très didactique est celui de Ruelle (1991).

Les géodésiques, quand on les prolonge jusqu'à l'infini, ont un comportement à première vue indescriptible. Le phénomène est chaotique ; lorsque l'on part d'un point selon la direction de départ de la tangente, le comportement global (en allant très loin) de ces géodésiques varie brusquement, même pour une toute petite variation de la direction initiale. On parle alors de sensibilité aux conditions initiales. Il décrit ainsi une catégorie de géodésiques de type III, qui forment un ensemble assez large parmi toutes les géodésiques : « Cette géodésique se rapprochera d'une géodésique périodique jusqu'à un certain minimum, puis s'en éloignera. Mais ensuite elle reviendra, puis retournera faire la même chose pour une autre géodésique périodique, et ainsi de suite indéfiniment. »



Deux surfaces à courbures négatives construites par Hadamard.

Analyste, en particulier en théorie de la mesure (de l'intégrale), grand probabiliste, mais aussi homme politique toute sa vie durant, ministre de la Marine, grand résistant, voici maintenant ***Félix Édouard Justin Émile Borel*** (Saint-Affrique 1871, Paris 1956). Avec Borel, on se croirait revenu au temps de Fermat ou de Viète, et l'on retrouve un mathématicien capable à la fois d'une vie politique complète et d'une vie tout aussi complète de mathématicien.

Son père était pasteur, d'un milieu assez aisé. Reçu premier à l'École polytechnique et à l'École normale supérieure, il choisit cette dernière dans le but de se consacrer à la recherche. Il y rencontre Paul Appell dont il épouse la fille, ce qui l'introduit dans les milieux intellectuels parisiens. Il se lie ainsi d'amitié avec Paul Valéry et Paul Painlevé. Il enseigne d'abord à l'École normale supérieure, puis à la Sorbonne. Entraîné par son ami Painlevé, il se lance dans la politique. Il est maire de Saint-Affrique, sa ville natale, puis député de l'Aveyron de 1924 à 1936, devient ministre de la Marine dans le bref cabinet Painlevé de 1925 (il précise bien qu'il ne veut pas l'Éducation nationale). Son action est prépondérante dans la création de l'Institut Henri-Poincaré. En raison de son opposition au régime de Vichy, il est emprisonné à Fresnes en 1941. Libéré, il retourne dans le Rouergue et s'engage dans la Résistance. Il obtient en 1955 la première médaille d'or du CNRS.

On lui doit la découverte et la démonstration du théorème de recouvrement fini pour les ensembles compacts, utilisé de façon permanente aujourd'hui, tant dans le sens nécessaire que dans le sens suffisant.

Borel est, après Baire, le second membre du trio magique de la théorie de l'intégration, trio dont le troisième membre est Lebesgue. En théorie de la mesure, il fonde l'outil indispensable pour une bonne définition d'une intégrale, la notion appelée aujourd'hui d'ensemble borélien, ou encore celle de tribu borélienne. Lebesgue reste cependant indispensable pour la rigueur de ses démonstrations. De 1897 à 1899, ce merveilleux trio révolutionne la théorie des fonctions, de la mesure et de l'intégrale. La trinité mesure de Borel, espace de Baire, intégrale de Lebesgue fait pour longtemps partie des concepts mathématiques indispensables (voir Choquet, 2001).

On ne peut pas faire de calcul des probabilités dans le cadre continu (le cadre discret est d'une tout autre facilité et est resté longtemps le seul abordé pour cause de grosses difficultés dans le cadre continu) sans Borel. Son ouvrage *Théorie mathématique du bridge*, publié en 1940, contient de nombreux calculs de probabilités utilisés, depuis lors, tous les jours par les experts de ce jeu.

C'est un écrivain très fécond, dont les livres ont une grande influence. Ainsi *Leçons sur la théorie des fonctions* (1898), *Leçons sur les séries divergentes* (1928), *Théorie mathématique du bridge*. Avec des collaborateurs, il publie dans les années 1920 un important *Traité du calcul des probabilités et des applications*.

Il lance aussi, à partir de 1904, une collection de monographies sur la théorie des fonctions.

Le chaos vu par un mathématicien, également artiste : Fomenko (*A 2-adic Solenoid*, 1977)

Le fondateur incontesté de la théorie actuelle de la mesure (c'est-à-dire des intégrales) est sans conteste ***Henri Lebesgue*** (Beauvais 1875, Paris 1941) : on dit, on écrit partout l'intégrale de Lebesgue. D'esprit, Lebesgue est un analyste-géomètre. Il le dit lui-même : « Pour ma part, j'ai toujours été guidé dans mes recherches par des considérations géométriques, et si je ne puis donner aucun de mes mémoires comme une application caractérisée de l'analyse à la géométrie, il me semble que j'ai fait constamment des applications de la géométrie à l'analyse. » Certains disent même aujourd'hui : « Pas de géométrie sans intégrale de Lebesgue ! »

Fils d'un ouvrier typographe qui meurt prématurément alors que Lebesgue n'a que 3 ans, il est élevé par sa mère et sa sœur, qui font des travaux de couture à domicile. Mais il y a à Beauvais, où il est né, un maire intelligent qui suit avec grand intérêt l'épanouissement des élèves des écoles primaires et secondaires. À l'aide de bourses successives, Lebesgue peut ainsi suivre des études secondaires puis de mathématiques spéciales. Il entre à l'École normale supérieure à 19 ans, alors que Borel y enseigne déjà. Lebesgue suit ses cours sur de nombreux sujets. C'est peut-être là qu'il prend conscience de ce que le contenu de ces cours n'est pas absolument rigoureux. Il enseigne lui-même jusqu'en 1906 à l'université de Rennes puis à celle de Poitiers, avant d'être nommé en 1912 au Collège de France.

« Ma théorie de l'intégration date de l'époque où j'avais 21 heures de classe (et 23 ans il faut le dire) et où je n'avais que des collègues qui le soir (dans la pension de famille où Lebesgue prenait ses repas) ne s'intéressaient qu'à la manille et au jacquet. » Cette théorie révolutionnaire de l'intégrale, préparée par les travaux de Borel et de Baire, fut très mal accueillie à ses débuts.

Les travaux de Lebesgue utilisent largement ceux de Borel, dont ses *Leçons sur la théorie des fonctions* de 1898. Il faut toutefois noter que la « trinité » ne fut pas sans connaître quelques rudes échanges (on connaît 230 lettres de Lebesgue à Borel). Sur le trio des intégrales, voir Choquet (2001). Pour l'histoire de la théorie de l'intégration au cours des siècles, voir Pier (1996). Pour Lebesgue lui-même, voir Félix (1974). Et voir aussi l'incroyable franchise et la dureté de Lebesgue dans ses lettres à Borel, dans Lebesgue (2004).

À la suite de sa thèse *Intégrale, longueur et aire*, il formule une théorie de la mesure qui améliore celle de Borel. Mais surtout, l'année suivante, il bâtit la théorie de l'intégrale qui porte son nom. Cette théorie clôt définitivement le problème de la définition de l'intégrale d'une fonction numérique. Et en même temps, elle ouvre un champ immense de recherches sur l'intégrale abstraite, développée par de nombreux successeurs. L'étude des contributions exactes de Lebesgue se trouve dans les *Éléments d'histoire des mathématiques* de Bourbaki (Bourbaki, 1969, p. 280). C'est l'intégrale de Lebesgue qui a permis le développement de la théorie moderne des probabilités, qui a permis en particulier à Kolmogorov de bâtir son axiomatique de cette théorie.

Formule théorème de la convergence dominée, de la dérivation sous le signe d'intégration, de Fubini :

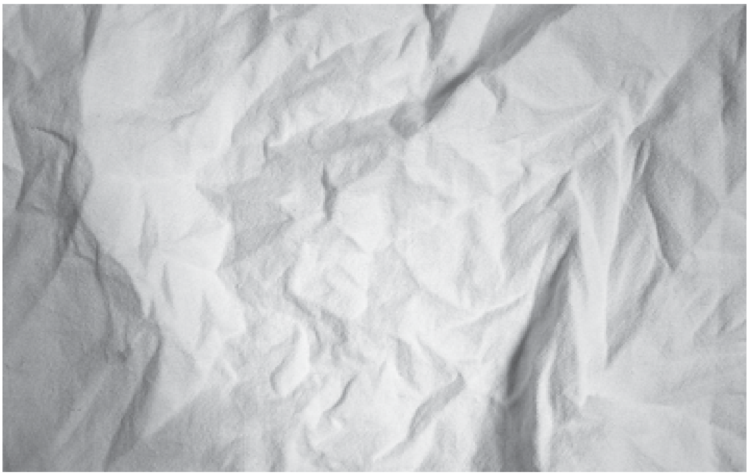
> Si g est une fonction intégrable, si $\{f_n\}$ est une suite de fonctions mesurables vérifiant $|f_n| \leq g$ pour tout n et presque partout, si $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ presque partout, alors f est intégrable et $\lim \int f_n dm = \int f dm$.

De ce théorème, on déduit, moyennant des conditions convenables mais *minima*, que l'on peut dériver sous le signe d'intégration : l'intégrale de la dérivée est la dérivée de l'intégrale. Théorème de Fubini : pour intégrer une fonction de deux variables, on peut intégrer successivement par rapport à la première, puis intégrer ce qui reste par la seconde.

Voici deux de ses contributions à la géométrie. Il est d'abord l'un des premiers à avoir traité le problème de savoir ce qu'est la dimension d'un espace géométrique assez général. Sa définition est que si l'on recouvre un espace de dimension n par des ensembles de diamètre suffisamment petit, il y a nécessairement des points qui appartiennent à au moins $n+1$ ensembles de recouvrement. La démonstration de Lebesgue n'étant pas complètement satisfaisante, il s'ensuit une querelle avec Brouwer (Poincaré s'est aussi occupé de la définition de la dimension dès 1903). Notons, pour l'étude de l'intuition mathématique, que Lebesgue a eu cette idée en regardant un maçon construire un mur de briques. Pour les théories de la dimension, le premier livre moderne est celui de Hurewicz et Wallman (1948).

Un mur de briques : le point de départ de la théorie de la dimension de Lebesgue. La façade de ce mur est de dimension 2, on y voit bien les points où nécessairement se rencontrent 3 briques.

Sa seconde contribution tient dans l'anecdote du mouchoir de Lebesgue. Jeune normalien, sortant d'un cours de Darboux où celui-ci démontrait que les surfaces applicables sur un plan (développables, comme on disait), c'est-à-dire avec conservation des longueurs, sont réglées (c'est-à-dire engendrées par une famille de droites) par des droites tangentes à une courbe régulière, Lebesgue aborde ses camarades son mouchoir complètement plissé à la main, qu'il déplie ensuite et applique sur une table : il n'y a, sur ce mouchoir, pratiquement pas de morceau de ligne droite ! La démonstration de Darboux est vraie, bien sûr, mais il faut supposer une surface assez lisse, munie partout de dérivées secondes et, en outre, continues ; et si l'on veut un résultat global, il faut des surfaces analytiques (dont le développement de Taylor est partout égal à la fonction considérée). Mais c'est seulement en 1954 que John Nash (prix Nobel d'économie, connu par le film qui lui a été consacré : *Un homme d'exception*), qui est surtout un mathématicien, démontre rigoureusement qu'il existe dans l'espace des surfaces applicables sur un plan mais ne contenant aucun segment de droite, si petit soit-il ! Le « mouchoir de Lebesgue parfait » existe donc réellement.



Un mouchoir plissé. Cherchez-y un segment de droite…

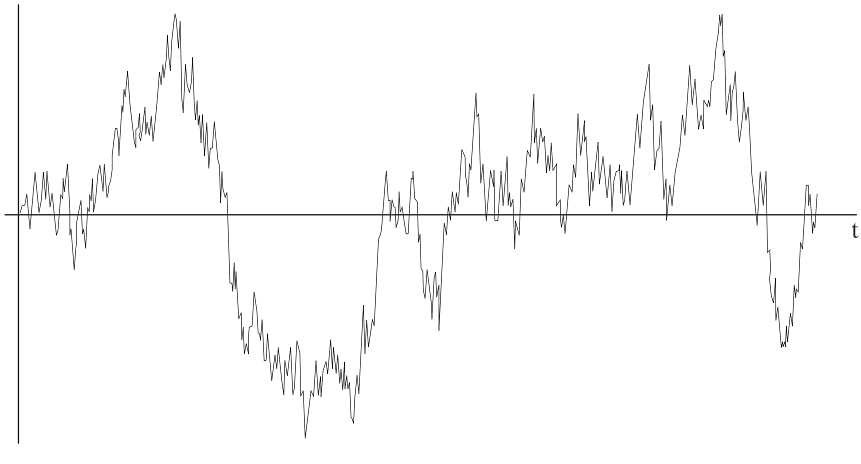
Un des fondateurs de l'analyse fonctionnelle et, avec Kolmogorov, le plus grand spécialiste du calcul des probabilités du XX^e^ siècle, est ***Pierre Paul Lévy*** (Paris 1886–1971). Mais : « Malgré les admirables travaux de Paul Lévy qui ont profondément influencé ces jeunes mathématiciens (en Russie et aux États-Unis), il a fallu presque deux décennies pour qu'il en soit de même en France » (Loève).

Dans son livre de souvenirs (1970), Lévy explique : « Reçu (premier) à l'École polytechnique et à l'École normale supérieure, je ne savais laquelle choisir. Mais je me dis que, en cas de guerre, officier je pourrais être mieux à l'abri. Je choisis la défense contre les aéronefs. » Bien lui en prit, car, avec Gaston Julia qui fut gravement blessé dès le début de la guerre de 1914 et resta une « gueule cassée », portant toute sa vie un masque noir (il eut un élève remarquable, Jacques Dixmier, qui fut un membre très influent de Bourbaki et eut Alain Connes comme élève), Paul Lévy fut le seul mathématicien rescapé sur plusieurs promotions d'élèves de ces deux écoles, toutes envoyées (et restées) au front. Le livre de réflexions cité ci-dessus fait partie de ce petit nombre de textes portant sur la création mathématique. On trouvera plusieurs analyses de l'œuvre de Lévy sur ce site Internet : <http://www.annales.org/archives>.

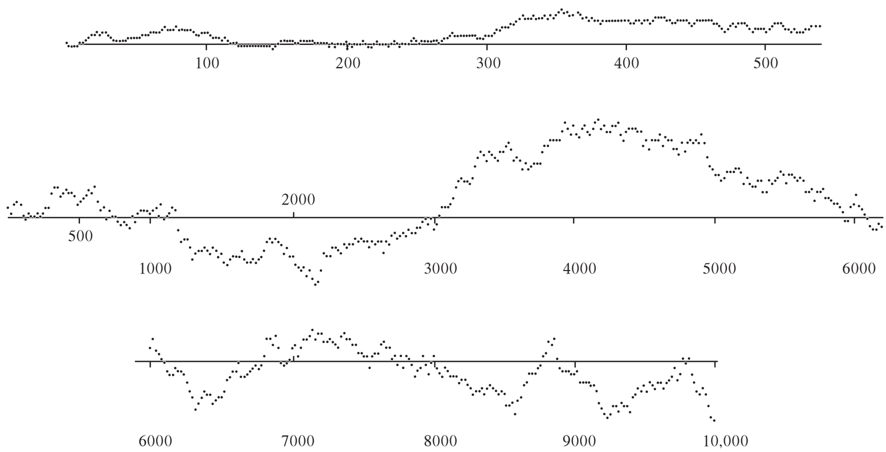
S'il fallut toutefois attendre Bourbaki pour la renaissance et l'explosion des mathématiques après 1950, c'est que Leray et Lévy étaient à la fois trop prophétiques, mais surtout complètement incompris en France, tandis que les pays étrangers se faisaient un régal des travaux de ces deux mathématiciens français.

Ingénieur au corps des Mines, docteur ès sciences en 1912, Lévy enseigne de 1910 à 1913 à l'École des mines de Saint-Étienne, puis à celle de Paris de 1914 à 1951. Il donne parallèlement des cours à l'École polytechnique, de 1920 à 1959. On ne sait si son influence en a pâti, mais ses livres, tout comme ses cours, étaient difficiles d'accès. À Polytechnique, les élèves, on l'a déjà dit, le surnommaient « le prince des ténèbres »...

Quoi qu'il en soit, il est pour toujours l'un des plus grands noms de la théorie des probabilités, honneur qu'il partage avec Laplace. Il y a introduit et étudié de nombreuses notions nouvelles. Entre autres, dans les processus stochastiques, celle de martingale. Il améliore énormément les résultats de Wiener sur le mouvement brownien.



Le graphe d'un mouvement brownien sur la droite (i.e. à une dimension).



La loi d'Arcsinus, illustrée ici par une simulation sur ordinateur du « gain » d'un joueur dans une partie de 10 000 coups du jeu de « pile ou face ».

Ses travaux doivent parfois être partagés avec d'autres, car il lisait Bertrand et Poincaré, qui ignoraient les travaux de l'école russe ; Paul Lévy croit donc que, mathématiquement, tout est à faire. Ce qui ne l'empêche pas de faire énormément. En résumé, il est, avec Wiener, le père de la théorie moderne du mouvement brownien. L'analyse fine de ce mouvement s'est poursuivie ardemment jusqu'à nos jours, les résultats étant radicalement différents selon la dimension : un (sur la droite), deux (dans le plan), trois (dans l'espace) ; mentionnons aussi les apports de Wendelin Werner : propriétés d'auto-intersection, de diamètre au bout du temps...

Débutons par le brownien discret à une dimension, qui revient à la même chose que l'étude du gain cumulé d'un joueur à pile ou face ; même dans le cas simple de ce jeu, il découvre en 1939 une loi insoupçonnée auparavant, dite loi d'arcsinus x. Elle est fondamentalement contraire à l'intuition, car c'est elle qui démontre que l'on a toutes les chances que l'un des deux joueurs soit pendant très longtemps gagnant. L'idée intuitive que les gains oscillent autour de la nullité est complètement fausse pour des temps ordinaires, elle n'est vraie que pour des temps infinis, ce qui est complètement irréaliste dans la pratique. Dans la formule ci-dessous, α désigne un nombre réel quelconque compris entre 0 et 1, l'entier n désigne le nombre de lancers de notre jeu de pile ou face, le nombre T_n désigne le nombre de fois où un joueur déterminé a un gain positif sur l'autre, et naturellement $\mathrm{P}_n(\mathrm{T}_n < \alpha)$ la probabilité que l'on ait $\mathrm{T}_n < n\alpha$:

Formule de la loi d'Arcsinus :

$$\mathrm{P}_n(\mathrm{T}_n\,\alpha) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\pi}\int_0^{\alpha}\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\alpha}$$

En langage de tous les jours, cette loi donne par exemple ceci : avec une probabilité de 2/3, l'un des joueurs sera en tête plus de 85 % du temps. Pire, avec une probabilité de 1/5, l'un des joueurs sera en tête plus de 97 % du temps.

Lévy résout définitivement le problème de la loi des erreurs (en même temps que Feller) en 1934–1935. Il s'agit de savoir si une suite de lois tend vers une loi limite. Lévy trouve la condition nécessaire et suffisante. C'est la preuve de l'intuition de Gauss sur la loi normale pour le comportement des erreurs d'observation. Il étend ce résultat pour les lois continues (infiniment divisibles).

Paul Lévy est le premier à faire de l'analyse stochastique fine, l'étude individuelle des trajectoires des processus. Dans ce domaine, on lui doit la notion de temps local : c'est le démon de Lévy, analogue au démon de Maxwell en physique : l'horloge du voyage est aléatoire ; on rencontre des ennuis non dénombrables. Aussi le mouvement brownien est-il, aux yeux d'Hermite et de Poincaré, le « monstre parfait ».

Il contribue aussi à l'étude des grandes déviations ; il s'agit ici d'un problème essentiel pour la pratique, et qui imprègne les applications de nombreuses disciplines : physique, biologie, etc. Il s'agit de savoir ce que l'on risque vraiment. Là encore, « il faut voyager avec une horloge aléatoire ».

Lévy introduit dans des textes de 1921 (publiés seulement en 1952 sous forme de livre) un outil géométrique essentiel aujourd'hui, que ce soit en analyse fonctionnelle, en mécanique statistique ou autre : la concentration. C'est le premier à fonder mathématiquement les intuitions, les affirmations sans preuve concernant la mécanique statistique (voir Maxwell). Ce phénomène est le suivant : sur une sphère de grande dimension, toute fonction (en physique, on parle d'observables) est presque partout égale à sa valeur moyenne : « On n'a pratiquement aucune chance de voir d'autre valeur d'une telle fonction. » Talagrand a continué, ainsi que Gromov, l'étude de ce phénomène de concentration. En fait, ce phénomène est considéré comme un acquis, « trivialement évident », par les physiciens de la mécanique statistique.

Ses livres ont eu une influence considérable, surtout hors de France, on l'a vu plus haut : *Leçons d'analyse fonctionnelle* (1922 et 1951), *Calcul des probabilités* (1925), *Théorie de l'addition des variables aléatoires* (1937-1954), *Processus stochastiques et mouvement brownien* (1948). Il a aussi écrit une petite autobiographie : *Quelques aspects de la pensée d'un mathématicien* (Lévy, 1970).

d La semence du renouveau (1930–1950)

Le texte qui suit est écrit sous notre propre responsabilité. Nous ne sommes pas sociologue des mathématiques. En outre, une analyse fine de la période dont nous allons parler reste encore à faire. Cependant, il existe plusieurs éléments permettant de s'y attaquer, même modestement. La plus grande partie de ce que nous allons dire est très bien exprimée, avec plus de détails, dans le remarquable texte sur Bourbaki (Mashaal, 2000). Bourbaki n'est pas tout dans ce renouveau, mais en constitue, tant directement qu'indirectement, un élément clef. Si, malgré un premier « trou » (dû au romantisme) et l'hémorragie de la première guerre mondiale, la France est aujourd'hui en valeur absolue la seconde école mathématique mondiale derrière les États-Unis, c'est à notre avis grâce à la loi des petits nombres, pour une fois favorable. Cette loi a voulu que, en seulement cinq promotions de l'ENS de 1922 à 1926, l'on trouve les noms suivants : André Weil, Jean Delsarte, Henri Cartan, Jean Dieudonné, Claude Chevalley, Jean Leray, René de Possel et Charles Ehresmann. On peut aussi penser que le tempérament français, la culture française, la tendance à l'abstrait, à l'idéologie, l'esprit frondeur aussi, sont très bien accordés à la nature des mathématiques.

Munis de bourses, certains d'entre eux, Weil en particulier, partent à l'étranger et se rendent vite compte de l'état de délabrement tant de l'enseignement que de la recherche en France. Ils réagissent de plusieurs façons, notamment par la création de Bourbaki (dont les tout premiers membres fondateurs sont Cartan, Chevalley, Delsarte, Dieudonné, de Possel et Weil). Celle-ci a pour origine le fait qu'Henri Cartan demandait sans cesse à André Weil comment organiser tel ou tel cours d'université, sur la formule de Stokes par exemple. C'est pourquoi ils décident d'écrire un livre d'enseignement français « à jour » ; nous l'avons répété, il n'y en avait alors aucun (c'est-à-dire à jour) avant 1955. Ils décident aussi d'organiser un séminaire, celui d'Hadamard s'étant arrêté en 1933 ; ce séminaire ne fonctionne que trois ans, de 1934 à 1938 mais ils y traitent des travaux d'Élie Cartan, de la théorie du corps de classes (il s'agit de théorie des nombres), des opérateurs dans l'espace de Hilbert. On l'appelle le « séminaire Julia », bien que Julia n'y participât point : il avait seulement fallu trouver un patronage pour obtenir une salle où tenir le séminaire.

Ces savants poursuivent, à partir de 1928 (thèses de Weil, d'Henri Cartan, celle de Leray datant de 1933), et leurs travaux personnels (de tout premier plan), et un travail commun pour redresser la barre du vaisseau français. On a déjà évoqué les obstacles que le ministère de l'Éducation nationale dressa devant les actions de Cartan à l'ENS. Mais, finalement, « Bourbaki » l'emporte progressivement. Au début, les jeunes normaliens sont enthousiasmés et se lancent dans la recherche, sûrs d'une reconnaissance internationale et poussés par la passion communiquée par les jeunes Bourbaki. Mais cette relance connaît une nouvelle accélération lorsque Schwartz accepte un poste de professeur à l'École polytechnique, y crée un centre de recherches mathématiques et commence « systématiquement » à débaucher de nombreux polytechniciens vers la recherche, et non vers une carrière d'ingénieur. Si l'on ajoute un troisième élément, Jacques-Louis Lions (élève de Schwartz), qui relance la France dans des applications des mathématiques de grande qualité, on comprendra (en partie) l'explosion actuelle des mathématiques françaises. Elle coïncide aussi avec la création de nombreuses universités qui a permis à tous ces jeunes, auteurs de thèses de qualité, de trouver un poste de professeur d'université et, plus encore, d'y faire une carrière rapide. Le rôle du CNRS pour sa part fut double, l'essentiel étant de permettre à certains de préparer une thèse sans trop de pression, et donc d'obtenir des résultats avancés. Il put aussi permettre à certains collègues de premier plan de profiter, pendant un certain temps, d'une décharge d'enseignement et de tâches administratives.

A contrario, malgré quelques mathématiciens de premier plan, l'Allemagne d'après-guerre n'a pas recouvré son rang de première école mathématique du monde, détruite qu'elle a été en quelques années par l'exode des mathématiciens juifs aux États-Unis, sans oublier tous ceux qui sont morts dans les camps d'extermination.

Nous reviendrons sur les travaux, les carrières de ces grands hommes, qu'ils fussent membres de Bourbaki... ou non, Leray étant l'exception la plus notable.

III *Les mathématiques françaises contemporaines*

a La place des mathématiques françaises dans le monde depuis 1950 : grandeur et rayonnement

Les mathématiques françaises sont actuellement, et ce depuis la chute du mur de Berlin, les deuxièmes du monde. Il nous faut justifier cela avec des critères impartiaux : les mathématiciens sont en effet notoirement attachés à prouver, à démontrer ce qu'ils annoncent.

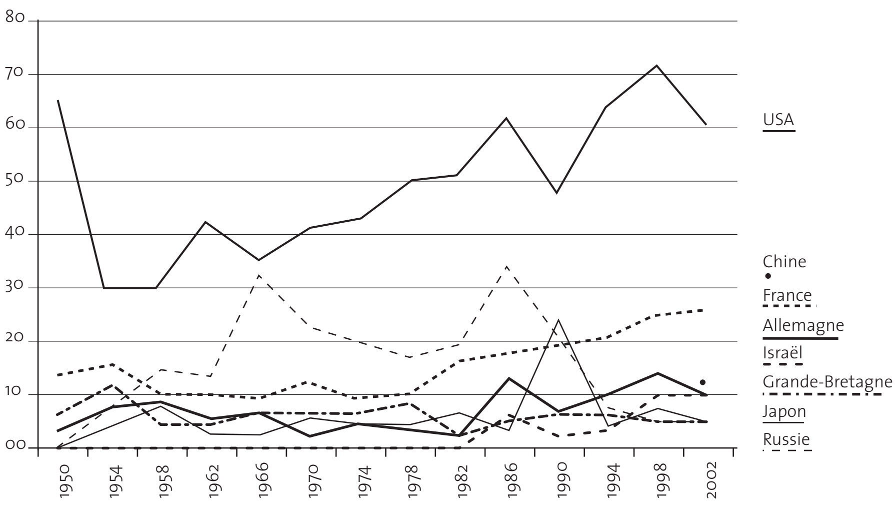
Premier critère, en grande partie suffisant, presque impartial : le nombre de conférenciers invités aux congrès internationaux des mathématiciens (nous écrirons ICM pour « International Congress of Mathematicians »). Particularité des mathématiques parmi les autres sciences : depuis 1897 (il se tient alors à Zurich), ces congrès ont lieu systématiquement tous les quatre ans (sauf en cas de guerre mondiale), et se déroulent depuis 1950 sous l'égide de l'Union internationale des mathématiciens (IMU, « International Mathematical Union »), à peu près démocratiquement élue par les sociétés mathématiques de tous les pays d'importance raisonnable. Ces congrès couvrent la totalité des différents domaines des mathématiques. Il y a des conférences plénières, d'une heure chacune, auxquelles tous les participants sont conviés, puis des conférences de 45 minutes couvrant tous les domaines. Leur nombre a augmenté avec les années. Voici les villes-hôtes des ICM avant 1950 :

1897	*Zurich*	1920	*Strasbourg*
1900	*Paris*	1924	*Toronto*
1904	*Heidelberg*	1928	*Bologne*
1908	*Rome*	1932	*Zürich*
1912	*Cambridge*	1936	*Oslo*

Le choix des conférences plénières est fait par le bureau exécutif de l'IMU. Notons en passant que les médailles Fields sont décernées lors de ces congrès, après le choix proposé à l'IMU par un petit comité *ad hoc*, considéré comme impartial (on ne lui connaît pas d'erreurs notoires, sauf d'avoir « manqué » Gromov, contrairement au comité Nobel). Les autres conférenciers invités sont répartis dans les sections (17 sections au dernier congrès de Pékin) et sont choisis par des comités (« panels ») à la composition réputée elle aussi démocratique. Le bureau exécutif de l'ICM désigne les « chefs » de panels, qui à leur tour s'entourent de spécialistes indiscutables en leur domaine, liste vérifiée et harmonisée par le bureau de l'ICM. Contrairement à d'autres disciplines, il n'y a pas de quotas par pays ni d'autres considérations ; seule compte la qualité de la production du chercheur. On notera juste une toute petite « bosse » dans les courbes, le pays hôte étant, par courtoisie, très légèrement favorisé par les différentes instances.

Si l'on regarde le volume des mathématiques qui se font dans le monde, et le nombre de ces conférenciers (167 à Pékin), on peut considérer que le nombre d'invités, quand il n'est pas trop petit, traduit fidèlement la valeur mathématique d'un pays. Notons également que, au vu de la croissance exponentielle de la production mathématique et malgré la légère augmentation du nombre d'invitations, être conférencier invité est un honneur toujours plus grand.

Autre remarque importante : le nombre de conférenciers invités de notre pays étant supérieur au nombre des sections de spécialités, il en résulte « en gros » que la France a aujourd'hui des spécialistes de premier plan dans tous les domaines des mathématiques. Or, bien que les choix soient purement scientifiques, les panels hésitent (ils ont même des instructions, certes très souples, en la matière) à inviter trop de conférenciers d'un même pays. La position française s'en trouve donc par là renforcée.



Nombre d'invités aux congrès internationaux des mathématiciens par pays, de 1950 à 2002.

Voici donc le tableau du nombre de conférenciers invités aux ICM depuis 1950 (voir figure). Les courbes racontent une histoire étonnante que nous pourrions laisser découvrir par le lecteur, mais nous ne résistons pas au plaisir de commenter ce tableau. En valeur absolue, l'école mathématique française a été la troisième du monde de 1950 à 1994, derrière les États-Unis et l'URSS, devant le Royaume-Uni et l'Allemagne, le Japon suivant de très près. Mais la chute du mur a assassiné l'école russe ; pratiquement tous ses ténors ont trouvé des postes dans les grandes universités américaines, voire quelques universités françaises (bien qu'elles offrent des salaires nettement inférieurs). Nous sommes donc devenus les deuxièmes, et de très loin. Dans ce tableau, nous n'avons pas fait figurer le nombre d'invités, car trop faible, d'autres écoles mathématiques existantes ; qu'elles nous pardonnent. Mais il s'est fait, et il se fait toujours, des mathématiques en Suède, en Norvège, en Finlande, au Brésil, en Hongrie, en Australie, au Danemark, en Belgique, en Inde, au Canada, en Pologne, en Suisse, en Italie ou aux Pays-Bas. Notre liste n'est pas ordonnée, ni en nombre, ni en valeur.

On notera, dans la liste des conférenciers français, de nombreux titres en français, donc des conférences en français. C'est en effet la seule langue que l'on y trouve, avec l'anglais (dans les premiers temps, on pouvait trouver des titres en russe, mais les exposés étaient présentés en anglais par un autre orateur, les mathématiciens soviétiques n'ayant pas le droit de sortir de leur pays, même pour les ICM !).

On remarquera, depuis 1994, l'émergence des écoles israélienne et surtout chinoise, cette dernière devant probablement progresser très fortement, même si un bon nombre de mathématiciens chinois sont établis aux États-Unis.

Une règle est de ne jamais (sauf cas exceptionnel, par exemple pour un médaillé Fields) inviter un orateur deux fois de suite. Or le nombre de Français invités plus d'une fois traduit, pour notre école mathématique, l'existence non seulement de quelques individus exceptionnels, mais de tout un vivier. Dressons donc la liste des invités français aux ICM. On ne peut apprécier une école scientifique que sur une période assez longue ; c'est pourquoi nous avons fait ce travail de « francophilie » depuis 1950, et pas seulement pour les ICM de 1998 et 2002. Quant au prochain congrès, il se tiendra à Madrid en 2006.

Invités français aux ICM depuis 1950

Les rattachements universitaires des participants sont ceux de l'époque du congrès correspondant.

1950 Cambridge

Conférences plénières d'une heure : 22 au total

Henri Cartan (université de Paris)
Laurent Schwartz (université de Nancy)
André Weil (université de Chicago)

Invités (conférences de 45 minutes) : 20 (7 sections) au total

Section 2 : Analysis
Szolem Mandelbrojt (Collège de France)

1954 Amsterdam

Conférence plénières : 16

Jean Dieudonné (université de Nancy)
André Lichnerovicz (Collège de France)

Invités

Section 1 : Algebra and Theory of Numbers
André Néron (université de Poitiers)
Section 2 : Analysis
Christian Pauc (université de Nantes)
Section 3 : Geometry and Topology
Jean-Pierre Serre (Collège de France)
Section 4 : Probability and Statistics
René Fortet (université de Paris)

1958 Édimbourg

Conférences plénières : 19

Henri Cartan (École normale supérieure, Paris)
Claude Chevalley (université de Paris)
Alexander Grothendieck (Institut des hautes études scientifiques)
René Thom (université de Strasbourg)

Invités (8 sections)

Section 3 : Analysis (8 invités)
Jacques-Louis Lions
Section 5 : Algebraic Geometry (8 invités)
Paul Samuel

1962 Stockholm

Conférences plénières : 16

Jean-Pierre Kahane (université de Paris-Orsay)
Jean-Pierre Serre (Collège de France)

Invités (7 sections) : 58

Section 3 : Analysis (22 invités)
Gustave Choquet (université de Paris)
Jean Leray (Collège de France)
Paul Malliavin (université de Caen)
Section 4 : Topology and Differential Geometry (4 invités)
Marcel Berger (université de Strasbourg)
Valentin Poénaru (université de Paris-Orsay)

1966 Moscou

Conférences plénières : 17

Bernard Malgrange (université de Paris-Orsay)

Invités : 59 (15 sections)

Section 5 : Analyse fonctionnelle
Jacques Dixmier (université de Paris)
Section 8 : Topologie
Jean Cerf (université de Paris)

Section 10 : Géométrie algébrique et variétés complexes

Adrien Douady (université de Nice)

André Néron (université de Paris-Orsay)

Section 12 : Mathématiques appliquées et physique mathématique

Louis Michel (IHES)

1970 Nice

Conférences plénières : 16

Invités : 145

Section B2 : Catégories, algèbres homologiques (7 invités)

Jean Giraud (ENS, Saint-Cloud)

Section B5 : Géométrie algébrique (10 invités)

Pierre Deligne (IHES)

Alexander Grothendieck (Collège de France)

Michel Raynaud (université Paris XI)

Section C1 : Topologie générale et algébrique (9 invités)

Max Karoubi (université de Strasbourg)

Larry Siebenmann (université Paris XI)

Section C4 : Analyse sur les variétés (11 invités)

René Thom (IHES)

Jean-Claude Tougeron (université de Rennes)

Section C5 : Groupes algébriques, fonctions automorphismes et groupes semi-simples (13 invités)

François Bruhat (université Paris VII)

Pierre Cartier (université de Strasbourg)

Section D4 : Algèbres de fonctions : analyse de Fourier (6 invités)

Nicholas Varopoulos (université Paris XI)

Section D8 : Fonctions et espaces analytiques complexes (9 invités)

André Martineau (université de Nice)

Frédéric Pham (université de Paris et CEA, Saclay)

Section D9 : Ensembles exceptionnels en analyse (3 invités)

Yves Meyer (université Paris XI)

Section D10

Jean-Michel Bony (université de Paris)

Louis Boutet de Monvel (université de Nice)

Pierre Grisvard (université de Nice)

Section D11 : Analyse fonctionnelle et équations aux dérivés partielles non linéaires (9 invités)

Jacques-Louis Lions (université de Paris)

Section E1 : Aspects mathématiques de la théorie quantique des champs (4 invités)

David Ruelle (IHES)

Section E2 : Théorie de la relativité (5 invités)

Yvonne Choquet-Bruhat (université de Paris)

André Lichnerowicz (Collège de France)

Section E3 : Problèmes mathématiques de la mécanique du continu (13 invités)

Georges Duvaut (université Paris VIII)

Jean-Pierre Guiraud (université de Paris et ONERA)

Maurice Roseau (université de Paris)

Section E7 : Problèmes mathématiques de la théorie de l'information, langage machine (5 invités)

Marcel Paul Schützenberger (université de Paris)

Roger Temam (université Paris XI)

1974 Vancouver

Conférences plénières : 17

Jacques-Louis Lions (Collège de France)

Jacques Tits (Collège de France)

Invités : 143

Section 4 : Algebraic Geometry (6 invités)

Norbert A'Campo (université Paris VII)

Section 5 : Algebraic Groups and Discrete Subgroups (7 invités)

Hervé Jacquet (université de New York, formé en France)

Section 8 : Differential Geometry and Analysis on Manifolds (6 invités)

Jacqueline Lelong-Ferrand (université Paris VI)

Section 9 : General Topology, Real and Functional Analysis (8 invités)

Bernard Maurey (École polytechnique)

Section 10 : Operator Algebra, Harmonic Analysis and Representation of Groups (8 invités)

Alain Connes (CNRS)
Michel Duflo (université Paris VII)

Section 11 : Probability and Mathematical Statistics, Potential, Measure and Integration (10 invités)

Jacques Faraut (université de Strasbourg)
Jacques Neveu (université de Paris)

Section 13 : Partial Differential Equations (9 invités)

Haim Brézis (université Paris VI)

Section 15 : Control Theory and Related Optimization Problems (7 invités)

Alain Bensoussan (université Paris XI)

Section 16 : Mathematical Physics and Mechanics (6 invités)

Jean-Michel Combes (Centre universitaire de Toulon)

1978 Helsinki

Conférences plénières : 17

Alain Connes (université Paris VI)
André Weil (Institute of Advanced Studies, Princeton)

Invités : 120 (19 sections)

Section 3 : Number Theory

John Coates (université Paris XI)

Section 4 : Geometry

Mikhael Gromov (SUNY, Stony Brook, par la suite à l'IHES)

Section 8 : Real and Functional Analysis

Ciprian Foias (université Paris XI)

Section 9 : Complex Analysis

Henri Skoda (université Paris VI)

Section 10 : Operator Algebra and Group Representations

Jacques Dixmier (université Paris VI)

Section 11 : Probability and Mathematical Statistics

A. Dellacherie (université de Strasbourg)

Section 12 : Partial Differential Equations

Johannes Sjöstrand (université Paris XI)

Section 13 : Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems

Michael Herman (École polytechnique)

Section 14 : Control Theory and Optimization Problems

Ivar Ekeland (université Paris IX)

Section 16 : Numerical Analysis

P. Raviart (université Paris VI)

1982 Varsovie

Conférences plénières : 16

David Ruelle (IHES)
René Thom (IHES)

Invités : 130

Section 1 : Mathematical Logic and Foundations of Mathematics (6 invités)

Jean-Yves Girard

Section 2 : Algèbre (9 invités)

Mikhael Gromov (IHES)
Christophe Soulé (CNRS, Paris)

Section 3 : Number Theory (7 invités)

Jean-Marc Fontaine (université Paris XI)
Jean-Loup Waldspurger

Section 6 : Algebraic Geometry (8 invités)

Bernard Teissier (CNRS)

Section 8 : Lie Groups and Representations (8 invités)

Michèle Vergne (CNRS)

Section 9 : Real and Functional Analysis (10 invités)

Yves Meyer (université Paris XI)

Gilles Pisier (université Paris VI)

Section 10 : Probability and Mathematical Statistics (7 invités)

Paul Malliavin (université Paris VI)

Section 11 : Partial Differential Equations (10 invités)

Jean-Michel Bony (université Paris XI)

Section 14 : Control Theory and Optimization (6 invités)

Pierre-Louis Lions (université Paris IX)

Section 15 : Numerical Methods (7 invités)

Roland Glowinski (université Paris VI)

Section 16 : Combinatorics and Mathematical Programming (5 invités)

Dominique Foata (université de Strasbourg)

1986 Berkeley

Conférences plénières : 16

Mikhael Gromov (IHES)

Invités : total 147

Section 2 : Algèbre (9 invités)

Michel Broué (ENS, Paris)

Pierre Gabriel (université de Zurich)

Section 4 : Géométrie (10 invités)

Jean-Michel Bismut (université Paris XI)

Yves Colin de Verdière (université de Grenoble)

Section 6 : Géométrie algébrique (8 invités)

Armand Beauville (université Paris XI)

Jean-Louis Colliot-Thélène (université Paris XI, CNRS)

Section 7 : Analyse complexe (9 invités)

Adrien Douady (université Paris XI)

Section 8 : Groupes de Lie et représentations (8 invités)

Laurent Clozel (université Paris XI)

Section 9 : Analyse réelle et fonctionnelle (13 invités)

Jean Bourgain (IHES)

Alain Connes (Collège de France)

Section 12 : Équations différentielles ordinaires et systèmes dynamiques (11 invités)

Ivan Kupka (université de Grenoble)

Section 13 : Physique mathématique (7 invités)

Krystof Gawedski (IHES)

Section 14 : Méthodes numériques et calcul

Oscar Lanford (IHES)

Section 19 : Enseignement des mathématiques

Jean-Pierre Kahane (université Paris XI)

1990 Kyoto

Conférences plénières : 15

Invités : 153

Section 3 : Théorie des nombres (8 invités)

Henri Gillet (University of Illinois, Chicago)

Gérard Laumon (université Paris XI)

Section 4 : Géométrie (11 invités)

Étienne Ghys (ENS, Lyon)

Section 5 : Topologie (10 invités)

Francis Bonahon (University of Southern California, Los Angeles)

Section 7 : Groupes de Lie et représentations (8 invités)

Olivier Mathieu (ENS, Ulm)

Colette Mœglin (université Paris VII)

Section 8 : Analyse réelle et complexe (11 invités)

Nessim Sibony (université Paris XI)

Nicholas Varopoulos (université Paris VI)

Section 9 : Algèbre d'opérateurs et analyse fonctionnelle (6 invités)

George Skandalis (université Paris VII)

Michel Talagrand (université Paris VI)

Section 10 : Probabilités et statistique mathématique (10 invités)

Lucien Le Cam (University of California, Berkeley)

Marc Yor (université Paris VI)

Section 11 : Équations aux dérivées partielles (12 invités)

Jean-Michel Coron (université Paris XI)

Gilles Lebeau (université Paris XI)

Pierre-Louis Lions (université Paris IX)

Pierre Shapira (université Paris XIII)

Luc Tartar (Carnegie Mellon University, Pittsburgh)

Section 12 : Équations différentielles ordinaires et systèmes dynamiques (8 invités)

Jean Ecalle (université Paris XI)

Jean-Christophe Yoccoz

Section 17 : Application des mathématiques aux sciences (3 invités)

Yves Meyer (université Paris IX)

1994 Zurich

Conférences plénières : 16

Jean Bourgain (IHES)

Maxim Kontsevitch (IHES)

Pierre-Louis Lions (CEREMADE, université Paris-Dauphine)

Jean-Christophe Yoccoz (université Paris XI)

Invités : 148

Section 1 : Logique (4 invités)

Alain Louveau (CNRS, université Paris VI)

Section 2 : Algèbre (7 invités)

Jean-François Mestre (université Paris VII)

Section 3 : Number Theory (8 invités)

Bernadette Perrin-Riou (université Paris XI)

Section 4 : Geometry (12 invités)

Claude Viterbo (université Paris XI)

Section 6 : Algebraic Geometry (7 invités)

Claire Voisin (université Paris XI)

Section 7 : Lie Groups and Representations (10 invités)

Michel Brion (ENS, Lyon)

Jean-Loup Waldspurger (université Paris VII)

Section 8 : Real and Complex Analysis (10 invités)

Jean-Pierre Demailly (université de Grenoble)

Section 11 : Partial Differential Equations (12 invités)

Jean-Yves Chemin (université Paris VII)

Benoît Perthame (université Paris VI)

Section 12 : Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems (9 invités)

François Ledrappier (École polytechnique)

Section 13 : Mathematical Physics (10 invités)

Jean Belissard (université de Toulouse)

Section 16 : Numerical Analysis and Scientific Computing (6 invités)

Philippe Ciarlet (université Paris VI)

Section 17 : Applications of Mathematics in the Sciences (10 invités)

Étienne Pardoux (université de Marseille)

Raoul Robert (CNRSD, université de Lyon)

Jean-Pierre Quadrat (INRIA, Rocquencourt)

1998 Berlin

Conférences plénières : 14

Jean-Michel Bismut (université Paris XI)

Gilles Pisier (université Paris VI)

Michel Talagrand (université Paris VI)

Invités

Section 3 : Théorie des nombres et géométrie algébrique arithmétique (9 invités)

Pierre Colmez (ENS, Paris)

François Gramain (université de Saint-Étienne)

Section 5 : Géométrie différentielle et analyse globale (13 invités)

Sylvestre Gallot (université de Grenoble)

François Labourie (université Paris XI)

Section 7 : Groupes et algèbres de Lie (10 invités)

Laurent Lafforgue (CNRS, université Paris XI)

Section 9 : Équations différentielles ordinaires et systèmes dynamiques (10 invités)

Michael Herman (CNRS, université Paris VII)

Section 10 : Équations aux dérivées partielles (9 invités)

Fabrice Béthuel (université Paris XI)

Frédéric Hélein (ENS, Cachan)

Section 11 : Physique mathématique (11 invités)

Pierre Collet (École polytechnique)

Section 12 : Probabilités et statistiques (12 invités)

Jean-François Le Gall (ENS, Paris)

Section 13 : Combinatoire (8 invités)

Alain Lascoux (université de Marne-la-Vallée)

Section 16 : Applications

Charles Peskin (Courant Institute, New York)

Section 18 : Enseignement et popularisation des mathématiques (7 invités)

Michèle Artigue (université Paris VII)

Section 19 : Histoire des mathématiques (3 invités)

Karine Chemla (université Paris VII)

2002 Pékin

Conférences plénières : 20

Laurent Lafforgue (IHES)

Invités : 167

Section 1 : Logique (3 invités)

Élisabeth Bouscaren (université Paris VII, CNRS)

Daniel Lascar (université Paris VII)

Section 3 : Théorie des nombres (9 invités)

Henri Cohen (université Bordeaux I)

Jean-Marc Fontaine (université Paris XI)

Emmanuel Ullmo (université Paris XI)

Section 4 : Géométrie différentielle (13 invités)

Paul Seidel (École polytechnique, CNRS)

Section 5 : Topologie (9 invités)

Emmanuel Giroux (ENS, Lyon)

Section 6 : Géométrie algébrique et complexe (7 invités)

Hélène Esnault (université d'Essen, formée en France)

Vadim Schechtman (université Toulouse 3 - Paul Sabatier)

Section 7 : Théorie des groupes de Lie et des représentations (11 invités)

Patrick Delorme (Institut de Luminy, Marseille)

Michael Harris (université Paris VII)

Marie-France Vignéras (université Paris VI)

Section 9 : Algèbre des opérateurs et analyse fonctionnelle (6 invités)

Philippe Biane (ENS, Paris)

Vincent Lafforgue (université Paris VI)

Section 10 : Probabilités et statistiques (11 invités)

Gérard Ben Arous (Institut de technologie de Suisse fédérale, formé en France)

Jean Bertoin (université Paris VI)

Section 11 : Équations aux dérivées partielles (12 invités)

Hajer Bahouri (université de Tunis, formé en France)

Tristan Rivière (ancien élève de Polytechnique, à l'EHT Zurich actuellement)

Section 12 : Équations différentielles et systèmes dynamiques (11 invités)

Christian Bonatti (université de Bourgogne, Dijon)

Alain Chenciner (université Paris VII)

Section 13 : Mathematical Physics (10 invités)

Nikita Nekrasov (IHES)

Section 14 : Combinatoire (8 invités)

Philippe Flajolet (INRIA, Rocquencourt)

Bruce Reed (CNRS, université Paris VI)

Section 16 : Analyse scientifique et analyse numérique (6 invités)

Albert Cohen (université Paris VI)

Section 17 : Application des mathématiques (10 invités)

Yann Brenier (université de Nice)

Nicole El Karoui (École polytechnique)

Section 18 : Mathématiques de l'éducation et popularisation des mathématiques (4 invités)

Jean-Luc Dorier (Institut universitaire de formation des maîtres, Lyon)

Les médailles Fields sont un critère plus particulier. On a vu qu'elles sont décernées tous les quatre ans lors des ICM, et que l'on en donne seulement entre deux et quatre. Les récipiendaires doivent de plus avoir moins de quarante ans. Aussi la médaille Fields est-elle une reconnaissance d'un niveau bien supérieur encore (en moyenne) à celui du Nobel (n'en déplaise aux collègues des autres disciplines). Pour l'histoire de cette médaille, on pourra consulter Riehm (2002). Voici les titulaires de cette prestigieuse médaille :

1936	Lars V. Ahlfors (Finlande, 29 ans), Jesse Douglas (États-Unis, 39 ans)
1950	**Laurent Schwartz** (France, 35 ans), Atle Selberg (Norvège, 33 ans)
1954	Kunihiko Kodaira (Japon, 39 ans), **Jean-Pierre Serre** (France, 28 ans)
1958	**René Thom** (France, 36 ans), Klaus F. Roth (Grande-Bretagne, 32 ans)
1962	Lars Hörmander (Suède, 31 ans), John W. Milnor (États-Unis, 31 ans)
1966	Michael Francis Atiyah (Grande-Bretagne, 37 ans), Paul J. Cohen (États-Unis, 32 ans), ***Alexander Grothendieck*** (France, 38 ans), Stephen Smale (États-Unis, 36 ans)
1970	Alan Baker (Grande-Bretagne, 31 ans), Heisuke Hironaka (Japon, 39 ans), Sergei P. Novikov (URSS, 32 ans), John G. Thompson (Grande-Bretagne, 37 ans)
1974	Enrico Bombieri (Italie, 33 ans), David B. Mumford (États-Unis, 37 ans)
1978	***Pierre Deligne*** (Belgique, 33 ans), Charles F. Fefferman (États-Unis, 29 ans), Grigorii A. Margulis (URSS, 33 ans), Daniel G. Quillen (États-Unis, 38 ans)
1982	**Alain Connes** (France, 33 ans), William P. Thurston (États-Unis, 35 ans), Shing-Tung Yau (États-Unis, 33 ans)
1986	Simon K. Donaldson (Grande-Bretagne, 27 ans), Gerd Faltings (Allemagne fédérale, 32 ans), Michael Freedman (États-Unis, 35 ans)
1990	Vladimir G. Drinfeld (URSS, 36 ans), Vaughan F. R. Jones (Nouvelle-Zélande, 38 ans), Shigefumi Mori (Japon, 39 ans), Edward Witten (États-Unis, 38 ans)
1994	***Jean Bourgain*** (Belgique, 40 ans), **Pierre-Louis Lions** (France, 38 ans) **Jean-Christophe Yoccoz** (France, 37 ans), Efim I. Zelmanov (Russie, 39 ans)
1998	***Maxim Kontsevitch*** (Russie, 34 ans), R. Borcherds (Grande-Bretagne, 39 ans), T. Gowers (Grande-Bretagne, 35 ans), C. McMullen (États-Unis, 40 ans)
2002	**Laurent Lafforgue** (France, 36 ans)

En gras sont indiqués les médaillés français, mais, pour être tout à fait honnête, nous avons quelque peu triché (à différents niveaux) avec quatre noms, figurés alors en italiques. Grothendieck est toujours resté apatride, mais il a fait presque toute sa carrière mathématique en France. Deligne est belge, mais il est resté à l'IHES de 1970 à 1984, comme chercheur d'abord puis comme professeur permanent. Bourgain est également belge, mais il a été professeur permanent à l'IHES de 1985 à 1994. Kontsevitch est encore russe lorsqu'il reçoit la médaille

Fields, mais il devient français en 1999 et est actuellement professeur permanent à l'IHES.

Enfin, voici quelques autres très grands prix internationaux et la contribution française à ceux-ci. Le prix Wolf est attribué par Israël chaque année en mathématiques (entre autres disciplines). Parmi les lauréats couronnés depuis sa fondation en 1973, on trouve cinq Français : Jean Leray (1979), André Weil (1979 également), Henri Cartan (1980), Mikhael Gromov (1993), Jean-Pierre Serre (2000). Le Belge Jacques Tits (aujourd'hui français) l'obtient pour sa part en même temps que Gromov.

Le prix Balzan (Italie et Suisse) est étonnamment peu connu en France ; il est pourtant extrêmement prestigieux, les disciplines « offertes » changeant chaque année de façon à couvrir tout le champ de la pensée mondiale. Les mathématiques n'arrivant guère que tous les cinq ans, le prix a été décerné aux mathématiciens suivants : Kolmogorov en 1962, Bombieri en 1980, Serre en 1985, Armand Borel en 1992, Gromov en 1999, Deligne en 2004.

Le prix Kyoto est lui aussi important par sa rareté ; il n'est attribué en mathématiques que de temps en temps. Or il a été attribué à Jacques-Louis Lions en 1991 et à Mikhael Gromov en 2002.

b Quelques grands noms de 1925 à aujourd'hui

Weil, H. Cartan, Chevalley, Serre, Grothendieck, Deligne, Lafforgue, Leray, Schwartz, J.-L. Lions, Malliavin, Meyer, Connes, Bourgain, P.-L. Lions, Ehresmann, Thom, Mandelbrot, Tits, Gromov, Herman, Yoccoz, Kontsevitch

Nous entreprenons maintenant une tâche presque impossible, et facilement critiquable pour ses injustices et autres erreurs de jugement. Même en se restreignant aux mathématiques françaises, l'augmentation exponentielle du corpus des mathématiques depuis 1950 rend la tâche de l'historien ardue. D'ailleurs, les textes qui apparaissent actuellement traitent toujours de l'histoire, du développement d'une partie restreinte de ce vaste domaine. Par exemple, la géométrie dans son ensemble n'étant pas étudiée, on ne trouve que tel ou tel sous-domaine : la convexité, les polyèdres, etc. Nous espérons que le lecteur, mais encore plus nos collègues français, nous pardonneront le trop bref, et certainement partial, panorama qui suit. Nous espérons que ceux que nous n'aurons pas nommés ne nous en voudront pas trop. Des circonstances atténuantes, toutefois : outre la croissance des mathématiques, la difficulté, voire l'impossibilité de prendre du recul. Certains noms ont été ou seront pourtant mentionnés indirectement, par exemple au travers de la liste des invités aux ICM, des membres de l'Académie des sciences, etc. On pourra aussi lire l'ouvrage de Charpentier, Nikolski et Habsieger (2000–2003), série d'exposés pour un large public, faits par des membres actifs de l'école mathématique française.

L'un des événements les plus importants dans l'histoire des mathématiques françaises est la naissance à Paris, en 1906, chez le docteur et madame Weil, d'un fils, André. Trois ans plus tard, en 1909, ils ont une fille, Simone. La famille Weil habitera ensuite rue Auguste-Comte, au sixième étage, un appartement avec une vue admirable sur Paris, par-dessus les jardins du Luxembourg [on peut y voir une plaque commémorative en l'honneur de Simone Weil, la ville de Paris traînant toujours les pieds pour mettre au-dessus (ou au-dessous ou à côté) une plaque pour André]. Leurs deux enfants vont devenir l'une des paires les plus extraordinaires de toute l'histoire de l'humanité. Simone Weil, la philosophe, d'abord. La meilleure façon de découvrir son œuvre, sa pensée, sa vie humanitaire et politique : un choix très judicieux de ses textes les plus importants (Weil, 1999). ***André Weil*** (Paris 1906, Princeton 1998) est pour sa part l'un des plus grands mathématiciens du XXᵉ siècle. Un très bon texte : Digne (1999). L'article de Pierre Cartier est passionnant, et il y parle de Simone et de ses relations avec son frère. Il faut y ajouter, bien sûr, son autobiographie (Weil, 1991). Signalons, avec tous les risques inhérents à ce petit jeu, que lorsqu'on posait, il y a une dizaine d'années, la question : « Quel est le plus grand mathématicien vivant ? », c'est le nom de Weil que l'on entendait le plus souvent.

Nous ne connaissons guère, dans l'histoire, un couple d'un frère et d'une sœur qui furent, et ce dans des domaines complètement différents, d'indiscutables génies. Citons Cartan (Digne, 1999) : « Certes, ils étaient très différents l'un de l'autre et n'avaient pas les mêmes aspirations. Mais leurs pensées se rejoignaient parfois et ils éprouvaient au fond une grande affection l'un pour l'autre. André raconte son désespoir lorsqu'un télégramme lui apprit que sa sœur venait de mourir d'épuisement à Asherford en Angleterre le 24 août 1943. Il s'est plus tard occupé activement de la publication des œuvres complètes de Simone Weil. Chacun d'eux, à sa manière, a contribué à enrichir le patrimoine de l'humanité. »

Différents, ils tiennent cependant énormément à communiquer entre eux. On trouvera dans les œuvres complètes d'André Weil (1979–1980), nombre de lettres à sa sœur. Plus étonnant encore est le fait que Simone Weil assista à plusieurs des rencontres de travail de Bourbaki.

Simone Weil aux côtés de son frère André lors d'un congrès Bourbaki à Dieulefit, en 1938. Elle assista également à celui de 1937 à Chançay.

Algébriste (en théorie des nombres), André Weil est l'un des fondateurs de l'analyse harmonique (avec Pontryagin et Gelfand), l'un des pères fondateurs (avec Zariski, Serre et Grothendieck) de la géométrie algébrique contemporaine, l'un des fondateurs de Bourbaki (c'est lui qui fut l'animateur le plus actif de cette « société secrète » de mathématiciens dont nous aurons à parler bientôt).

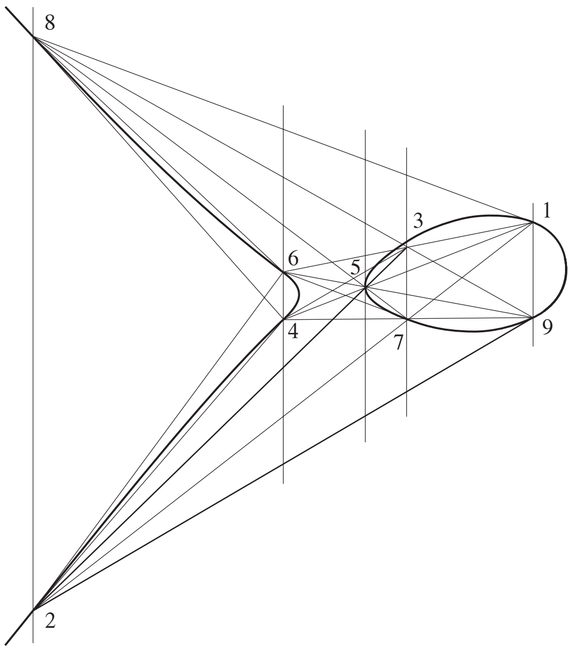
La vie et la carrière de Weil sont tout à fait atypiques par rapport aux carrières actuelles. Il entre en 1922 à l'École normale supérieure (à 16 ans) et, durant sa scolarité, continua à porter des culottes courtes. C'était bien là son esprit frondeur, ce que le directeur de cette école lui reprocha. À 22 ans, il soutient une thèse qui aura, en théorie des nombres, une influence fondamentale. Professeur à Strasbourg, il quitte cette ville en 1939, ayant dès 1938 envisagé d'être « insoumis ». Il choisit mal son point de chute : la Finlande. Il se comporte, involontairement bien sûr, de telle sorte qu'il se fait emprisonner à Helsinki, soupçonné d'être un espion. Finalement, grâce à l'intervention du mathématicien Nevanlinna, il est expulsé vers la Suède puis conduit à Rennes, jugé et incorporé dans l'armée. Démobilisé en 1940, il rejoint finalement l'Amérique avec sa famille. Mais aucune université américaine ne daigne lui offrir un poste décent jusqu'à ce que Stone lui en propose un à Chicago. Il termine sa carrière comme professeur permanent à l'Institute for Advanced Studies de Princeton. Il aurait désiré revenir en France dès 1945, mais une campagne est menée contre lui, orchestrée principalement par Leray. Comme le dit Cartier *in fine* : « Toute une génération perdit un maître. » Weil a écrit une autobiographie (Weil, 1991) passionnante, car il écrit un français remarquable, mais elle s'arrête à sa nomination à l'université de Chicago ; et certains pourront regretter de ne pas y trouver plus d'éléments sur sa pensée, son intuition, sa façon même de créer. On peut cependant compenser ce manque par la lecture des commentaires faits par lui-même à la fin de ses œuvres complètes (Weil, 1979–1980). Ne chargeons pas trop Leray : les difficultés de Weil ne furent pas seulement scientifiques, mais aussi politiques, à cause de son « insoumission ». On trouvera le point de vue de Weil lui-même, dans son commentaire, page 542, de son virulent article « Science française ? », tome II de Weil (1979–1980). Ajoutons que Henri Cartan milita, mais en vain, pour faire obtenir à Weil une chaire au Collège de France. Sur l'affaire de la prison finlandaise, il faut absolument ajouter, à ce qu'en dit Weil dans son autobiographie, la mise au point faite par Pekonen d'après les archives de la prison d'Helsinki (Pekonen, 1992).

Weil avait, enfin, un caractère difficile et il était assez conscient de sa valeur. Il ne manque pas, dans Weil (1991), de mentionner l'erreur historique de Richard Courant qui, lors du séjour de Weil à Göttingen, jugea qu'il serait *unproduktiv* !

Weil fut hanté toute sa vie par cette partie de l'algèbre appelée théorie des nombres (on dit aussi, mais de moins en moins, arithmétique), étude des nombres premiers, équations du type de celle du théorème de Fermat. Il est essentiel de comprendre le rapport entre cette théorie des nombres et la géométrie algébrique, c'est-à-dire l'étude des variétés algébriques. Les variétés algébriques classiques, que ce soit en degré ou en dimensions, étaient toujours définies par des équations polynomiales dont tous les coefficients étaient des nombres réels ou complexes. Pour faire de la théorie des nombres, essentiellement des nombres entiers, il faut restreindre l'étude au cas où les coefficients sont tous des nombres entiers. Mais comme, dans les nombres entiers, il n'y a pas d'inverse, il faut en fait travailler dans des corps (où il y a toujours des inverses) appelés « entiers modulo p », c'est-à-dire (p étant un nombre premier) les classes de restes de division par p. Ces variétés deviennent donc abstraites, n'étant plus plongées dans des espaces familiers. Pour définir correctement ces objets, puis leurs liens les uns avec les autres, il faut échafauder une théorie complète. C'est cette élaboration que commence Weil dans un livre célèbre : *Foundations of Algebraic Geometry* (Weil, 1946). Pour une histoire de ce thème, se reporter à Dieudonné (1974).

C'est grâce, entre autres, à ces solides fondements qu'il peut démontrer l'hypothèse de Riemann sur les corps finis. Pour les courbes elliptiques (courbes cubiques mais sur des corps variés), on lui doit d'avoir conjecturé des énoncés, devenus conjectures de Weil, qui donnèrent une impulsion très forte à la recherche. En fait, il y en eut deux : la conjecture de Weil de 1949, la (les) conjecture(s) de Weil de 1967 (il faut là encore relever l'âge « avancé » du scientifique). La conjecture de 1949 a été finalement démontrée par Deligne en 1974 (à l'aide des travaux de Grothendieck), nous en verrons une très belle conséquence. Par contre, les conjectures de 1967 ne sont toujours pas complètement démontrées (ce sont des intermédiaires importants dans la récente démonstration du théorème de Fermat). On doit aussi à Weil la notion abstraite de variétés abéliennes, notion alors sous-jacente à de nombreuses théories, mais qui était avant lui plus « intuitée » que solidement fondée.

Un problème essentiel est l'étude des points à coordonnées rationnelles situés sur des courbes algébriques à coefficients entiers. Poincaré conjecture en 1901 que, pour les courbes elliptiques (on dit aussi de genre un, ce sont celles du troisième degré), ces points forment un groupe (pour l'addition géométrique fabriquée avec les alignements de trois points) engendré par un nombre fini d'éléments seulement. Ce ne sera démontré que par Mordell en 1922. Pour les courbes de degré plus grand (de *genre* plus grand), toujours dans le même texte de 1922, Mordell conjecture que les points à coordonnées rationnelles sont cette fois en nombre fini. La thèse de Weil entre dans le vif du sujet, innovant parce qu'elle prend racine dans les travaux de Riemann, Abel, Jacobi, et en quelque sorte les réunit (ce qui est aujourd'hui basique dans ce genre d'études). C'est un panorama complet des relations entre formes modulaires, multiplication complexe, corps de classes et séries de Dirichlet. Comme Weil l'écrit à sa sœur en 1940 : « Mon travail consiste à déchiffrer un texte trilingue. » La conjecture complète de Mordell n'est démontrée qu'en 1983 par Faltings (qui obtient la médaille Fields pour cela).



Sur cette courbe cubique (de degré trois, on dit aussi courbe elliptique car elle peut, et doit, être paramétrée par des fonctions elliptiques), on a marqué un point d'ordre dix, c'est-à-dire que les opérations dessinées du troisième point de rencontre de la courbe avec une droite qui joint deux de ses points s'arrêtent au bout de dix fois.

Précisions sur cette trinité, de Weil lui-même : « Il y a donc là un point où faire porter l'attaque (je m'excuse de la métaphore)... On peut espérer qu'en le démontrant, on aura ouvert une brèche qui permette d'entrer dans la place (je m'excuse de l'aggravation de la métaphore) (il faut savoir que la place est un nom technique en théorie des courbes algébriques)... On verra qu'en fait d'artillerie, on dispose d'une inscription trilingue, d'un adultère et d'un pont qui est une plaque tournante, sans parler de Dieu et du diable, qui jouent aussi leur rôle dans la comédie. »

Ces conjectures de 1949 sont issues des réflexions, ainsi que de très nombreux calculs pour les corroborer, faits en prison en Finlande ; on ne manquera pas de les rapprocher des travaux de prison de Poncelet et de Leray, sans oublier les bannissements (un peu plus « dorés » tout de même) de Viète et de Cauchy.

Weil est un mathématicien complet. En analyse, on lui doit l'étude des mesures invariantes sur les groupes et les espaces homogènes ; l'ouvrage *L'Intégration dans les groupes topologiques* (Weil, 1940) a longtemps été un classique incontournable. Il invente, en 1937, la notion d'espace uniforme, qui généralise celle d'espace topologisé par une métrique. Il dit lui-même, en page 254 du premier tome de Weil (1979–1980) : « Quand j'ai inventé (je dis bien inventé et non pas découvert) les espaces uniformes, je n'avais pas du tout l'impression de travailler dans une matière dure, mais plutôt l'impression que doit avoir un sculpteur de métier qui s'amuserait à faire un bonhomme de neige. »

En géométrie, on lui doit (avec Allendoerfer) la première démonstration, longtemps recherchée, du théorème global de Gauss-Bonnet en dimension quelconque. Cette formule permet de calculer la caractéristique d'Euler-Poincaré d'une variété riemannienne compacte comme une intégrale portant sur une expression (fort compliquée à découvrir) calculée à partir du tenseur de courbure de cette variété : un exemple fondamental, parmi d'autres, du passage du « local » au « global », un thème profond dans toutes les mathématiques, tant en géométrie qu'en analyse et en algèbre. Il participe aussi au développement de la théorie des faisceaux créée par Leray et à une démonstration conceptuelle du théorème de Rham, pièce de base dans la topologie des variétés différentielles.

Les *Œuvres complètes* de Weil ont la particularité d'être complétées, en fin de volume, par des commentaires de l'auteur lui-même. La seule lecture de ces commentaires, même pour un profane, a quelque chose d'assez passionnant, voire extraordinaire. Ses ouvrages : *Foundations of Algebraic Geometry* (Weil, 1946), *L'Intégration dans les groupes topologiques* (Weil, 1940), *Variétés abéliennes et courbes algébriques* (Weil, 1948) ont eu une influence considérable, mais surtout hors de France, comme ce fut le cas pour Leray et pour Paul Lévy, avant d'être relayés chez nous, mais plus ou moins tard. Pour bien mettre en lumière le retard de la France en mathématiques entre les deux guerres, on notera que Weil eut même des difficultés pour trouver un rapporteur pour sa thèse (voir Weil, 1991).

La construction des fondements de la géométrie algébrique moderne sera poursuivie par Zariski, Serre et Grothendieck (*Le Langage des schémas*), même s'il y a toujours, après ce dernier, des travaux profonds à faire en géométrie algébrique, comme, par exemple, la théorie de l'intersection de Fulton (Fulton, 1998). Un autre événement capital pour les mathématiques françaises (et mondiales) est le fait qu'***Henri Cartan*** (né en 1904 à Nancy), fils d'Élie Cartan, entre à l'École normale supérieure en 1923, un an seulement après Weil. Weil et Cartan se retrouvent professeurs à l'université de Strasbourg. Cartan, pour son enseignement du certificat annuel (qui était alors à la base de la formation des professeurs), portant sur « Calcul différentiel et intégral », se pose beaucoup de questions : il n'existe aucun ouvrage d'enseignement qui le satisfasse, notamment concernant les intégrales multiples et Stokes. Cartan « harcèle » Weil pour savoir comment s'en sortir. Weil finit par dire : « Maintenant cela suffit ; il faudrait mettre tout cela au point une bonne fois, le rédiger. Il faut écrire un bon traité d'analyse, après on n'en parlera plus. » C'est le point de départ de Bourbaki. Pour Henri Cartan lui-même, récent centenaire, voir le centième (*sic* !) numéro de la *Gazette des mathématiciens*, d'avril 2004, notamment Houzel (2004).

Parlons maintenant de Bourbaki (Nicolas de son prénom), en réalité un pseudonyme pour des ouvrages écrits par un collectif de mathématiciens, français pour la plupart. La référence de base sur Bourbaki est un numéro spécial de *Pour la science* dans sa série « Les génies de la science », intitulé « Bourbaki : une société secrète de mathématiciens » (Mashaal, 2000). Ce texte, pratiquement parfait, a été vérifié et admis sans aucune critique par, entre autres (anciens) membres de Bourbaki, Jean-Pierre Serre. Le nom Bourbaki a fait beaucoup fantasmer, ce que Bourbaki ne regrette pas, puisqu'il a toujours désiré rester secret pour tout ce qui le touche, hormis ses ouvrages ! On complétera cette référence par le tout récent et remarquable Houzel (2004). Ses *Éléments de mathématiques* constituent une profonde réorganisation et une clarification des mathématiques à leur époque, avec une terminologie et des notations bien pensées, un style particulier. Il faut savoir qu'à ses débuts, terminologie et définitions variaient énormément selon les auteurs et rendaient de nombreux textes très pénibles à lire. Les noms, les notations de Bourbaki furent, de ce fait, presque immédiatement adoptés. Au fil du temps, les Bourbakis se sont plaints, à juste titre, de ce que leur nom soit associé sans aucune raison aux dramatiques dérives, dans l'enseignement français, de l'introduction des « mathématiques modernes ». On pourrait dire (de façon un peu caricaturale ?) : « Comme Antigone, ils ont vu avec effroi leurs actes se détacher d'eux pour mener une existence propre. »

Sur proposition de Weil, instruit par de nombreux exemples autour de lui (mieux vaut ne pas citer de noms), la règle absolue est de quitter les fonctions de membre à part entière de Bourbaki à cinquante ans. Cela n'empêche pas Dieudonné, avec le dévouement qui l'a caractérisé toute sa vie, de s'occuper des nouvelles rédactions, de l'ingrat travail de correction des épreuves, etc.

La méthode de travail de Bourbaki, outre les travaux personnels de rédaction de l'ouvrage collectif, consiste à se réunir plusieurs fois par an pour avancer dans la conception et dans la rédaction. Nous avons vu que Simone Weil a assisté, avant guerre, à certaines de ces réunions.

Un élément important, pour un auteur inconnu comme l'est Bourbaki à ses débuts, est de trouver un éditeur qui accepte de prendre des risques. Il y avait en effet de fortes chances pour que l'éditeur « obligé » des mathématiques à l'époque, contrôlé par les pontes en place, presque complètement en dehors des mathématiques récentes, à savoir Gauthier-Villars, n'accepte pas les manuscrits de Bourbaki ! On verra dans Mashaal (2000) comment Weil a la chance de connaître l'éditeur Freymann (les éditions Hermann aujourd'hui). Le lecteur aura peut-être déjà rencontré des couvertures de l'éditeur Hermann. On pourra se demander, à la vue des premières et quatrièmes de couverture, où est l'université de « Nancago » ! Il s'agit d'un canular, où Nancago est écrit pour Nancy et Chicago, car à cette époque Weil est professeur à l'université de Chicago, et la majorité des membres de Bourbaki (Dieudonné, Schwartz, Serre, Godement) sont professeurs à l'université de Nancy. Freymann a le courage de publier ce genre de plaisanterie en couverture ! À long terme, les éditions Hermann ont beaucoup récolté de ce coup de poker ; la vente des ouvrages de Bourbaki en a constitué l'une des principales sources de revenu.

Le rayonnement de Bourbaki ne tint pas qu'à ses ouvrages, mais aussi à la qualité exceptionnelle de ses membres. Plus ou moins directement, nous allons, outre Weil et Cartan, retrouver les noms de bon nombre de ceux qui furent, ou sont encore, membres de Bourbaki : Jean Dieudonné, Charles Ehresmann, Jean-Louis Koszul, Jacques Dixmier, Roger Godement, François Bruhat, Pierre Cartier, Jean-Louis Verdier, Michel Demazure, Jean Giraud, Louis Boutet de Monvel, Armand Beauville, Adrien Douady, Bernard Teissier, Samuel Eilenberg, Claude Chevalley, Jean-Pierre Serre, Jean Delsarte, Laurent Schwartz, Alexandre Grothendieck, Pierre Gabriel, et nous demandons encore une fois pardon à ceux que nous n'aurons pas mentionnés. Mais l'anonymat voulu de Bourbaki est notre meilleure excuse !

Henri Cartan soutient sa thèse la même année que Weil, en 1928 ; il est alors professeur au lycée de Caen, puis chargé de cours à Strasbourg. Weil et Cartan sont tous deux candidats à ce poste ; Strasbourg choisit Cartan, « non pas pour [ses] mérites personnels, mais parce que Georges Valiron, professeur à Strasbourg, s'intéressait plus aux fonctions d'une variable complexe qu'aux travaux d'André Weil » (citation de Cartan lui-même). Weil n'en veut pas à Cartan, et part quelque temps aux Indes (il a appris le sanscrit dès la classe préparatoire à l'École normale). Il revient à Strasbourg en 1933 et, de leurs années passées ensemble naît, nous l'avons vu, Bourbaki.

C'est une chance pour les mathématiques françaises que Cartan ait été chargé, de 1945 à 1965 (en fait, à partir de 1948 véritablement, car, par fidélité, il retourne deux ans à Strasbourg), des études de mathématiques à l'École normale supérieure. Il y joue un rôle extraordinaire, enthousiasmant les promotions, à tel point que la direction doit limiter le nombre d'élèves voulant « faire des maths ». Il est en même temps le directeur de recherches de nombreux élèves. Henri Cartan déploie une grande activité : il fait cours aux premières années, aux deuxièmes années et prépare à l'agrégation. Sans compter le fameux « séminaire Cartan ». Ces cours sont absolument fondamentaux, car, jusqu'en 1955 du moins, il n'existe pas dans la grisaille de l'obsolète Sorbonne un seul cours de mathématiques digne de ce nom, à l'exception de l'option « Probabilités théoriques » confiée à Paul Lévy. Cartan décide d'envoyer deux élèves par promotion à Nancy, « chez Bourbaki », pour trois mois, et de faire donner par Serre des cours aux « carrés », les élèves de deuxième année de l'ENS. Au bout de deux ans, l'Administration finit par s'y opposer. Les mathématiques « pour normaliens » ne doivent se faire qu'à Paris !

Les membres de Bourbaki se sont engagés à publier leurs propres travaux personnels indépendamment et à ne les insérer qu'exceptionnellement dans l'un des ouvrages de l'hydre polycéphale. Les travaux essentiels d'Henri Cartan concernent la topologie algébrique : l'utilisation des catégories — dont il est un ardent propagateur — les foncteurs, les faisceaux — une notion d'algèbre homologique. Son livre, coécrit avec Eilenberg (membre étranger de Bourbaki quelque temps, en même temps que Serge Lang, tous deux étant bilingues), obtient une grande influence (Cartan et Eilenberg, 1956). En théorie des fonctions de plusieurs variables complexes, Cartan est un nom incontournable (principe de Oka, variétés de Stein). Mais, sur le versant de l'« enseignement », on lui doit également un texte essentiel, partie « exposée » de l'immense iceberg que Bourbaki ne publia pratiquement pas (Cartan, 1977).

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \\
\cdots \arrow[r] & A^{n+1,m} \arrow[u] \arrow[r, "d_2^{n+1,m}"] & A^{n+1,m+1} \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & A^{n,m} \arrow[u, "d_1^{n,m}"] \arrow[r, "d_2^{n,m}"'] & A^{n,m+1} \arrow[u, "d_1^{n,m+1}"'] \arrow[r] & \cdots \\
 & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}
$$

Le module gradué associé à A devient un complexe avec un opérateur de différenciation totale $d\colon \mathrm{A}^p \longrightarrow \mathrm{A}^{p+1}$ qui s'écrit sur $\mathrm{A}^{m,n}$: $d_1^{m,n}+d_2^{m,n}$ Donc : $d(\mathrm{A}^{m,n}) \subset \mathrm{A}^{n+1,m} + \mathrm{A}^{m,n+1}$. Un diagramme de Cartan et Eilenberg (1956).

$$
\begin{tikzcd}
 & \operatorname{Ker} d' \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ker} d \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ker} d'' \arrow[d] \arrow[dddll, rounded corners, to path={ -- ([xshift=2ex]\tikztostart.east) |- ([yshift=-1ex]\tikztostart.south |- \tikztotarget.north) -| ([xshift=-2ex]\tikztotarget.west) -- (\tikztotarget)}] & \\
 & M' \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & N'' \arrow[d] & \\
 & \operatorname{Coker} d' \arrow[r] & \operatorname{Coker} d \arrow[r] & \operatorname{Coker} d'' &
\end{tikzcd}
$$

Le « diagramme du serpent », également issu du livre coécrit avec Eilenberg.

Pour la petite histoire, on notera qu'il fut assez fier de publier, avec son père Élie Cartan, deux articles : « Les transformations des domaines cerclés bornés », aux *Comptes rendus de l'Académie des sciences* en 1931, et un article d'applications de mathématiques aux *Annales des PTT* en 1925 : « Note sur la génération des oscillations entretenues. » Si l'on veut résumer en une phrase l'explication du renouveau inespéré, presque incroyable, des mathématiques françaises après la seconde guerre mondiale, on pourrait dire : « C'est grâce à Henri Cartan. » Une anecdote le prouve : Cartan quitte, en 1965, la direction des études de mathématiques à l'École normale supérieure et, lors de la cérémonie d'adieux et de remerciements (on lui offre un exemplaire relié de tous les exposés du « séminaire Cartan »), il a cette phrase révélatrice : « Mais tous les mathématiciens français sont ici, aujourd'hui ! » Et le mathématicien russe Vladimir Arnold d'ajouter: « Mais, Monsieur, même à Moscou nous sommes tous vos élèves ! » Cartan est bel et bien comparable à Monge.

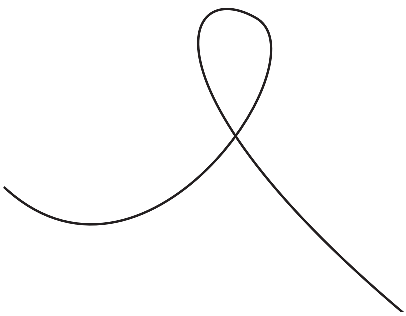
Pour organiser les noms suivants, la chronologie des dates de naissance n'ayant plus trop de sens, nous allons tout d'abord, à la suite de Weil, dérouler le tapis prestigieux de la géométrie algébrique. Nous parlerons ensuite d'analyse, et enfin de géométrie.

Il est bien entendu que nos grands hommes ont aussi fait des découvertes dans d'autres domaines que ceux qui nous servent ici de prétexte pour les introduire.

Algèbre au sens large
(théorie des nombres, géométrie algébrique, algèbre)

Vient d'abord, en géométrie algébrique, ***Claude Chevalley*** (Johannesburg 1909, Paris 1984). Il entre à l'École normale juste après Weil et Cartan, avec qui il se lie d'amitié et d'estime. Corollaire : Chevalley est l'un des fondateurs enthousiastes de Bourbaki, dont il sera jusqu'à l'âge de la retraite (de Bourbaki) un ardent collaborateur. Pour la petite et triste histoire — bien que terminée — des luttes intestines en mathématiques, on notera que Chevalley, candidat à Paris après la guerre, ne fut pas retenu lors de sa première candidature, et que la Sorbonne lui préféra Paul Dubreil. L'avis décisif fut celui de Leray : « Lorsque j'ai eu besoin d'une théorie de l'intersection des variétés algébriques, je n'ai pas utilisé celle de Chevalley, par contre j'ai pu me servir de celle de Dubreil. » En fait, pour sauver Leray d'un jugement trop simpliste, il faut savoir que ce dernier, qui avait été cinq ans prisonnier, en voulait passablement à Chevalley, qui était resté à New York à la déclaration de guerre, son père étant alors consul là-bas. Finalement, tout s'arrange l'année suivante, et Chevalley peut enfin revenir en France, à la Sorbonne. Il a plusieurs élèves, dont Michel Broué, actuel directeur de l'Institut Henri-Poincaré et rédacteur en chef du plus important journal international d'algèbre : *Journal of Algebra*.

Fondateur de la théorie des groupes algébriques, expert en géométrie algébrique proprement dite, il publie un livre célèbre pour son étude révolutionnaire des courbes, soigneusement épurée de toute vision géométrique : *Algebraic Functions of One Variable*. Il s'agit en fait d'un livre sur les courbes algébriques. Ce qui a permis à Weil d'écrire dans une analyse célèbre de ce livre : « One might never suspect him of having ever heard of Algebraic Curves or taking interest in them… ». Une anecdote illustre ce point. Elle est rapportée par Serge Lang (un temps, on l'a dit, collaborateur de Bourbaki) : Chevalley et Zariski (un des princes, avec Weil, Serre et Grothendieck, du renouveau de la géométrie algébrique) avaient une discussion sur les courbes, et aucun des deux ne semblait comprendre l'autre. En désespoir de cause, Chevalley demande à Zariski : « Qu'est-ce que vous appelez une courbe ? » Ils étaient devant un tableau noir, Zariski dit : « Eh bien ! Pour moi, c'est ceci », et il dessina une courbe :



$f(x,y$

Ce qu'est une courbe pour Zariski

Ce qu'est une courbe pour Chevalley

Et il continua : « Et pour vous, qu'est-ce que c'est qu'une courbe ? ». Chevalley répondit : « Ce n'est pas du tout cela pour moi, pour moi c'est $f(x,y)=0$! ».

Signalons, prétexte pour compléter nos informations sur Bourbaki, que Serge Lang dut par la suite quitter Bourbaki pour « trahison ». En effet, pour l'écriture de ses livres, Bourbaki procéde ainsi : une fois le sujet choisi, l'un de ses membres se porte volontaire pour écrire un texte, un « rapport ». Texte critiqué ensuite, à la condition que toute critique sérieuse débouche sur une nouvelle version. Lang écrit un rapport sur la cohomologie des groupes, mais, lui qui écrit encore un livre par an aujourd'hui, trouve le procédé trop long et le publie à son compte. C'est absolument contraire à la règle : les rapports intermédiaires de Bourbaki doivent absolument rester secrets.

Chevalley est à l'origine de contributions fondamentales en théorie du corps de classe (théorie des nombres). En géométrie algébrique, il est l'un de ceux qui ont contribué à en faire saillir l'un des aspects fondamentaux, l'algèbre commutative. Chevalley est surtout le premier à introduire en géométrie algébrique la notion de schéma, dont on verra qu'elle fut la notion fondamentale qui permit à Grothendieck de révolutionner cette discipline.

Toujours très soucieux de rigueur, il publie un livre qui fait date dans toute l'histoire de la discipline, *Theory of Lie Groups* (1946), où il fonde solidement cette notion de groupe de Lie : Élie Cartan y faisait œuvre considérable, mais en en considérant les fondements, en particulier la notion de variétés différentiables, comme allant de soi. Il avait ainsi écrit, au début de son livre sur la géométrie riemannienne (Cartan, 1928) : « La notion de variété est assez difficile à définir avec précision » !

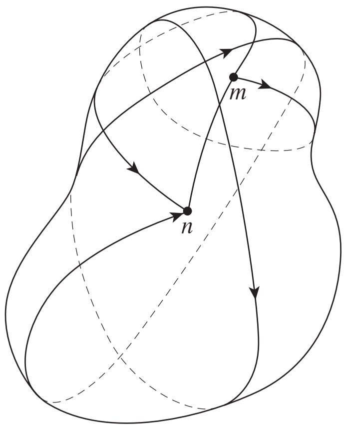
Le maillon suivant de la chaîne française de géométrie algébrique est ***Jean-Pierre Serre*** (né à Bages en 1926). Avec Weil, Zariski et Grothendieck, il est l'un des quatre fondateurs de la géométrie algébrique moderne. On peut dire qu'il est le premier Français à avoir fait de la géométrie de premier plan après Élie Cartan. Serre est très précoce, médaillé Fields à 28 ans, professeur au Collège de France dès ses 30 ans, prix Balzan en 1985, prix Wolf en 2000 et premier récipiendaire du tout nouveau prix Abel (décerné par la Norvège), l'année de sa fondation en 2003.

Il est, dès son entrée dans Bourbaki, l'un de ses membres les plus influents. Pour la petite histoire des Bourbaki non reconnus, voire « persécutés », Serre est candidat à Nancy en 1953, mais on lui préfère Legras, un mathématicien de second plan, malgré le fait que Delsarte, l'un des fondateurs et cheville ouvrière importante de Bourbaki, en soit le doyen. Serre est élu l'année suivante, mais quitte presque aussitôt Nancy en 1956 pour le Collège de France.

Serre a une influence considérable sur plusieurs générations de jeunes.

Ainsi, il organise dans les années 1950, à l'ENS, le « séminaire de la thurne 100 ». Ses cours au Collège de France sont chaque année un événement. En outre, il estime que, n'ayant pas de cours proprement dits à donner à des étudiants, ni d'examens à faire passer, il se doit d'écrire des livres. C'est l'un des auteurs les plus clairs et les plus concis de toute l'histoire des mathématiques. Son *Cours d'arithmétique* est un tour de force quant au rapport (nombre et importance des résultats/nombre de pages). Ses deux livres sur les groupes de Lie, *Algèbres de Lie semi-simples complexe*s (1966) et *Lie Algebras and Lie Groups* (1965), sont de tels classiques qu'ils ont été surnommés le Petit Serre et le Grand Serre ; la panacée pour les étudiants en groupes et algèbres de Lie.

Dès sa thèse en 1951, Serre se rend célèbre en utilisant la suite spectrale de Leray pour montrer, en topologie algébrique, que l'espace des lacets d'une variété compacte a une topologie « infiniment » compliquée. D'où il déduit (par la théorie de Morse, qui n'avait pu, malgré ses efforts, obtenir ce résultat) que pour toute variété de ce type munie d'une structure riemannienne quelconque, toute paire de points peut être jointe par une infinité de trajectoires géodésiques.
La publication de cette thèse est un record de rapidité (mais Serre a déjà publié plusieurs travaux auparavant). Elle est annoncée en 1950 par trois notes aux *Comptes rendus de l'Académie des sciences*. Serre rédige sa première note assez vite, à la demande de Cartan ; il la lui remet un lundi. Le mardi, Cartan porte la note à l'imprimerie Gauthier-Villars ; elle est composée dans la journée et publiée le mercredi. Quant à la thèse proprement dite, publiée aux *Annals of Mathematics,* journal sélectif s'il en est, Eilenberg en emporte de Paris le manuscrit en partant, en 1951, pour les États-Unis, et cette fois encore la publication est très rapide. L'idée de Serre est apparemment trop simple pour « marcher » (comme souvent celles de Gromov). L'espace de tous les chemins d'une variété est contractible, sa topologie est triviale. On veut montrer que l'espace des lacets (les chemins fermés), lui, a au contraire une topologie infinie ; plus précisément, qu'il possède des groupes d'homologie (les objets introduits par Poincaré) non nuls en un nombre infini de dimensions. Or, il y a nécessairement de la topologie dans la variété compacte considérée ; la suite spectrale de Leray force une compensation de cette topologie non triviale avec celle de la fibre formée des lacets. Cette thèse applique aussi la suite spectrale de Leray au calcul de la topologie des sphères, un sujet où l'on ne savait pratiquement rien auparavant.



Une géodésique sur une surface est le mouvement d'une particule lancée et qui se meut sur cette surface sans action extérieure. Attention : quand on dit une infinité de géodésiques joignant deux points, on tient compte de la longueur du trajet, même si le support géométrique est le même ; c'est ainsi que sur la sphère ordinaire (en fait, un cas exceptionnel), on ne trouve qu'un seul support géométrique, le grand cercle tout entier qui joint ces deux points, mais il y a une infinité de façons de le parcourir (c'est-à-dire de tourner de plus en plus de fois le long d'elle-même). Trouver des géodésiques périodiques, qui se referment et restent sur le même support géométrique, est beaucoup plus difficile. Poincaré échoua à montrer l'existence d'une seule de ces géodésiques sur une brave surface convexe. À la suite de Birkhoff et de nombreux autres, des progrès décisifs furent réalisés par Gromov.

Ensuite, pour des raisons de théorie des nombres, il doit généraliser la théorie de Weil pour traiter des objets algébriques. Pour cela, il introduit systématiquement la théorie des faisceaux de Leray et, dans un texte célèbre surnommé « Gaga », opère un lien aujourd'hui fondamental entre géométrie algébrique et géométrie analytique. C'est l'un des aspects de ce que l'on appelle le passage du local au global. Avoir des renseignements globaux avec des données locales, c'est une partie du désir de prédiction qui nous hante tous. Ce sont ces travaux qui valent en 1954 à Serre la médaille Fields.

On lui doit également des contributions fondamentales en algèbre commutative (qui est maintenant à la base de la géométrie algébrique) ou en K-théorie, domaines dans lesquels il est encore actif aujourd'hui.

Il est assez rare que les mathématiciens expliquent la façon dont ils obtiennent leurs résultats. Dans le cas de Serre, on pourra lire dans les différents volumes de ses *Œuvres* (Serre, 2003) les commentaires et les lettres qui y figurent. Et surtout sa correspondance avec Grothendieck, passionnante, ardue, mais révélatrice de la façon dont travaillent les génies (Colmez et Serre, 2001).

Œuvres : *Groupes algébriques et corps de classe* (1959)
Corps locaux (1962)
Cohomologie galoisienne (1964)
Lie Algebra and Lie Groups (1965)
Algèbres locales, multiplicités (1965)
Algèbres de Lie semi-simples complexes (1966)
Représentations linéaires de groupes finis (1968)
Abelian l-adic representations and elliptic curves (1968)
Cours d'arithmétique (1970)
Arbres, amalgames, SL2 (1977)
Autour du théorème de Mordell-Weil (1984)
Œuvres (2003)

Voici maintenant un géant des mathématiques, travaillant comme un « bulldozer ». Il couronne la liste des fondateurs français de la géométrie algébrique contemporaine. Il figure aussi dans celle des plus grands mathématiciens du XXe siècle : ***Alexander Grothendieck*** (né à Berlin en 1928). Sa vie mouvementée ne pouvant pas être décrite en quelques mots, mieux vaut se référer à Cartier (2000). Ce texte est remarquable, tant scientifiquement qu'humainement ; il nous semble indispensable à lire avant de penser quoi que ce soit de Grothendieck sur la foi de certaines légendes (nombreuses pour un tel personnage).
On pourra aussi lire son autobiographie partielle (agressive, polémique et pleine de redites, après un début captivant : Grothendieck, 1986). Les 200 premières pages sont passionnantes pour pénétrer la façon dont il faisait des mathématiques, mais se développe ensuite un aspect paranoïaque concernant notamment ses relations avec Deligne. Ce texte est pratiquement introuvable, n'ayant jamais trouvé d'éditeur ; Grothendieck a toujours refusé de supprimer la moindre page, la moindre ligne de son texte ! Herreman (2000) livre une analyse de ce texte, fine, documentée et utile à tous ceux qui n'ont pas été des proches de Grothendieck. Une autre référence récente, remarquable, sur la vie et la nature mathématique profonde de Grothendieck : Jackson (2004).

Sa thèse, écrite en 1953 et publiée en 1955, a pour origine le travail que lui propose Jean Dieudonné, alors à Nancy, et qui trouve son jeune élève un peu prétentieux : résoudre des problèmes d'analyse fonctionnelle (théorie des espaces normés) que ni lui, ni Laurent Schwartz ne parviennent à résoudre. Grothendieck demeure deux mois silencieux, puis revient avec la solution des quinze problèmes (qui étaient listés à la fin de l'article de Dieudonné et Schwartz) et en tire plus tard une remarquable synthèse de plusieurs centaines de pages, parue notamment dans un volume spécial édité par l'American Mathematical Society. Dans cette thèse, il fonde de toutes pièces une théorie des produits tensoriels topologiques pour les espaces de Banach. Comme le dit Cartier, il révolutionne le sujet et, en quelque sorte, le « tue ». Ce qui n'est qu'une figure, ce texte constituant en réalité le point de départ du renouveau de la théorie géométrique de ces espaces.

Grothendieck est aussitôt membre de Bourbaki. Il entre au CNRS, puis devient professeur permanent à l'IHES de 1960 à 1969. Il décide brusquement, en 1970, de quitter (en pleine période de production) les mathématiques pour se consacrer à l'écologie. Il reviendra quelquefois aux mathématiques par la suite, mais jamais au même niveau qu'auparavant. Nous laissons aux amateurs de sociologie le soin de trouver une ou plusieurs explications à ce brusque départ. Citons cependant Cartier (2000) : « Les raisons de cet abandon en rase campagne ? Crûment dit, il est rattrapé par sa psychose, mais dans le contingent : désespoir d'être dépassé par son disciple Deligne, " syndrome Nobel ", mise à jour par la " révolution soixante-huitarde " de la contradiction entre le libertaire qu'il croit être et le mandarin universitaire qu'il est aux yeux des autres, sentiment d'échec devant certaines de ses conjectures avortées (conjecture de Hodge, conjectures dites standards), épuisement et lassitude après vingt années d'engagement total, jour et nuit, au service de sa muse mathématique ? Un mélange de tout cela. »

Grothendieck est aussi un militant politique ; il ne refusa pas sa médaille Fields, qui devait lui être attribuée lors du congrès ICM de Moscou en 1966, mais il n'alla pas la chercher. C'est Henri Cartan qui présente, comme il est d'usage pour les médailles Fields, son œuvre mathématique. Notons, pour la petite histoire, qu'une autre médaille Fields de ce congrès de Moscou, Stephen Smale, voulut tenir une conférence de presse à la fin du congrès et fut alors « enlevé » par le KGB, c'est-à-dire qu'il disparut jusqu'à son embarquement dans le premier avion.

L'influence de Grothendieck sur les mathématiques est considérable. Elle est telle que l'on ne peut plus faire de la géométrie algébrique sans lire les *Éléments de géométrie algébrique* (énorme succession de textes auxquels Dieudonné a collaboré, appelée *EGA* par tous les spécialistes). Grothendieck écrit en français ; c'est à lui que l'on doit, entre autres, le maintien du français comme langue internationale en mathématiques. Tout futur chercheur en géométrie algébrique doit lire Grothendieck, les *EGA* sont une bible, et tous savent ce que veut dire ce sigle.

Son influence « directe » est tout aussi considérable. Grothendieck tient à l'IHES de Bures-sur-Yvette un séminaire hebdomadaire où l'assistance vient nombreuse. Parmi elle, nombreux sont les élèves de thèse de Grothendieck, et ce de toutes nations ; à leur tour, ils modèlent la majeure partie des recherches actuelles en géométrie algébrique. Mais comme Klein, Hilbert, Hermite, Yau et bien d'autres, son caractère dictatorial l'amène à mépriser (et donc refuser pour publication dans les journaux qu'il contrôle, directement ou non) les travaux de géométrie algébrique qui ne sont pas dans sa ligne. Et, *a contrario,* à surestimer les travaux de ses propres élèves.

Après sa thèse, dès 1955, à l'âge de 27 ans, il commence une seconde carrière mathématique. Il complète les fondations de la géométrie algébrique posées par Weil, Zariski et Serre, fondation assez générale pour couvrir les variétés algébriques abstraites (et non données par des équations), entre autres sur des corps quelconques (ce qui est fondamental en théorie des nombres). Pour ce faire, il introduit, à la suggestion de Pierre Cartier, le concept de schéma (voir plus loin) pour des anneaux commutatifs quelconques, alors que Chevalley n'osait le faire que pour un type restreint d'anneaux. On peut dire de façon un peu simpliste qu'un « point d'une variété algébrique est un empilement, au-dessus de ce point, d'une suite d'objets purement algébrique, des idéaux d'un anneau convenable ».

Continuant dans cette optique, Grothendieck pousse très loin la notion de catégorie (due à MacLane et Eilenberg), ce qui lui permet notamment, comme on le verra, de considérer l'ensemble de tous les ensembles, ce qui dans le langage de la théorie classique des ensembles conduirait à des paradoxes. Fondamentalement, Grothendieck couronne en géométrie algébrique le fait que le concept dominant devient celui d'algèbre commutative (étude des anneaux commutatifs et de leurs ensembles d'idéaux). À comparer avec le point de vue de Connes, que l'on examinera plus loin : la géométrie non commutative.

L'apport de Grothendieck est incontournable : il fourmille d'idées originales et fécondes. Grothendieck travaille, on l'a dit, comme un « bulldozer », et d'une façon qui lui est propre : il attaque un sujet en proclamant : « Dans x mois, j'aurai terminé la question, et en y pages. » Il peut se tromper du simple au double, mais guère plus. Il attaque ainsi la théorie des espaces normés puis celle des fonctions de variables complexes, puis encore la topologie algébrique (algèbre homologique), où il crée la structure qui est devenue l'objet de la K-théorie. Ses travaux le mènent alors à la théorie des nombres (qui a fasciné depuis toujours presque tous les mathématiciens qui étaient assez puissants pour y apporter des contributions substantielles). Depuis Weil, on sait que la théorie fine des nombres suppose d'être capable de faire de la géométrie algébrique sur des corps de base finis. Grothendieck poursuit les fondations de Weil par un saut dans un concept abstrait absolument original, celui des schémas. Il s'agit du seul concept assez puissant pour unifier les points de vue de Weil, Zariski et Serre ; et obtenir ainsi une notion de variété algébrique suffisamment générale. De même qu'en physique, on remplace un point par des observables, ici, on remplace un point par un ensemble d'objets algébriques appelés idéaux et associés naturellement à ce point dans l'objet étudié.

Ces fondements de la géométrie algébrique actuelle ont été publiés sous forme d'articles (le nom est bien mal choisi) parus dans les *Publications mathématiques* de l'IHES, surnommées « Playboy » à cause de leur couverture bleue, de loin le meilleur journal mathématique du monde (au moins sur la période allant de sa fondation à aujourd'hui).

Le second axe de ses recherches est encore plus au cœur des mathématiques : c'est la théorie des ensembles, théorie d'un paquet d'objets trop généraux pour les schémas. Ce sont les catégories, les foncteurs, les topos. Foncteurs et catégories sont apparus avant Grothendieck, mais les topos lui sont dus et couronnent l'ensemble. L'idée sous-jacente à la notion de catégorie est que ce ne sont pas les objets, les ensembles qui comptent le plus, mais les relations (foncteurs, flèches) qui s'établissent entre eux. La notion de topo permet de parler de point en un sens radicalement opposé à toute vision naïve des choses. Cette notion élimine en outre tous les paradoxes classiques de la théorie des ensembles, comme l'ensemble de tous les ensembles, qui n'a plus aucun sens contradictoire comme c'était le cas dans la théorie classique fondée au tournant des XIXe et XXe siècles.

Le plus célèbre, à juste titre, des élèves directs de Grothendieck est ***Pierre Deligne*** (né à Bruxelles en 1944). Bien qu'il soit belge, nous l'inclurons dans l'école française des mathématiques. Professeur à l'IHES de 1970 à 1984, il est présentement à l'IAS de Princeton. Il vient très vite en France, après ses premières années d'université en Belgique, comme chercheur à l'IHES et devient l'élève de Grothendieck. Il reprend du reste sa chaire à l'IHES, avec un délai décent de « deuil », à la suite du brusque départ de celui-ci en 1970.

Deligne reçoit la médaille Fields en 1978 pour, entre autres, la démonstration de la conjecture de Weil (la première, celle de 1949) en 1974 ; cette conjecture, prolongeant celle de Ramanujan, concernait la structure de l'ensemble des solutions de certaines équations diophantiennes (en nombres entiers ou rationnels, c'est la même chose essentiellement). Une de ses conséquences est à la portée de tous : elle permet de « calculer » le nombre de façons dont un entier peut s'écrire comme somme de 24 carrés ! On lui doit aussi l'établissement de relations fines entre formes modulaires et cohomologie pour les courbes elliptiques.

Tout entier n peut s'écrire comme somme de 24 carrés (de nombres entiers) :

$$\mathrm{N} = a_1^2 + a_2^2 + \dots \quad \dots + a_{24}^2$$

Mais de combien de façons ? Si $r_{24}(n)$ désigne ce nombre de façons, on savait depuis longtemps que le gros morceau de ce $r_{24}(n)$ était $\frac{16}{691}\sigma_{11}(n)$ où $\sigma_{11}(n)$ est la somme des puissances 11e de tous les diviseurs de n (assez facile à calculer). Par contre, dans la formule exacte $r_{24}(n) = \frac{16}{691}\sigma_{11}(n) - \frac{128259}{691}\tau(n)$ (n pair), le terme $\tau(n)$ était très mal connu. Dans les années 1910–1920, Ramanujan conjectura que ce nombre ne croît pas trop avec n ou, plus précisément, que l'on a pour ce $\tau(n)$ l'encadrement précis :

$$-2^{11/2} < \tau(n) < 2n^{11/2}$$

Laurent Lafforgue (né à Antony en 1966) démontre en 2000 la conjecture de Langlands pour les objets appelés corps de fonctions. Il reçoit en conséquence la médaille Fields en 2002. Et une chaire à l'IHES ! Il est auparavant directeur de recherches au CNRS, rattaché à l'université d'Orsay.

La conjecture de Langlands a été formulée à la fin des années 1960 : il s'agit de pouvoir relier des propriétés arithmétiques à celles des fonctions automorphes. Pour attaquer cette question, Lafforgue perfectionne la théorie des chtoukas de Drinfeld, introduite dans les années 1970, les *chtoukas* étant des objets très abstraits, difficiles à expliquer dans le langage de tous les jours. *Chtouka* est une adaptation d'un mot russe de Drinfeld, dont l'étymologie provient de l'allemand *Stück* (morceau). Il faut aussi créer de nouvelles variétés, analogues aux courbes modulaires. La conjecture de Langlands, plutôt philosophie de Langlands, car sa formulation précise n'existant pas, exige d'établir une correspondance entre deux sortes d'objets mathématiques apparemment éloignées l'une de l'autre. Cette conjecture reste actuellement l'un des mobiles de recherche les plus importants qui soient. On trouvera dans le numéro 88 (avril 2001) de la *Gazette des mathématiciens* un exposé par Laumon des travaux de Lafforgue, destiné aux mathématiciens professionnels. Lafforgue écrit systématiquement en français et contribue ainsi, à la suite de Serre et de Grothendieck, au maintien du français dans la littérature scientifique internationale.

Analyse, probabilités

Pour Yvonne Choquet-Bruhat, le « plus grand mathématicien du XXe siècle » est ***Jean Leray*** (Chantenay 1906, La Baule 1998). Dans ce petit jeu des « plus grands » de ce siècle, on trouve aussi, on l'a vu, André Weil ! Un numéro spécial de la *Gazette des mathématiciens* est consacré à Leray (Kantor, 2000).

On doit à Leray deux types de contributions bien différentes, mais fondamentales et complètement novatrices. En EDP (équations aux dérivées partielles), le théorème du point fixe de Leray-Schauder (outil d'une puissance exceptionnelle, le premier de ce genre en dimension infinie — la dimension infinie est la caractéristique des EDP, contrairement aux EDO). Rappelons l'adage de Hermann Weyl : « Les mathématiques sont la science de l'infini. » Ici, l'infini est celui de la dimension des espaces où l'on travaille (les espaces de fonctions sont pratiquement toujours de dimension infinie).

Toujours en EDP, Leray est le premier à introduire, pour mieux l'étudier, la notion de solution faible, une fonction qui admet des singularités, peut devenir infinie, de même que certaines de ses dérivées (on parle de dérivée faible). Pour revenir « sur la terre des vraies solutions », il faut des théorèmes de régularité ; Leray les démontre avant que Sobolev en URSS ne leur donne une poussée définitive.

Ne voulant pas que ses travaux, durant ses cinq années de captivité en Autriche, de 1940 à 1945, puissent servir aux nazis, Leray se consacre à des sujets « non classés », de mathématiques « pures ». Ce sont la théorie des faisceaux (concept entièrement nouveau) et la suite spectrale. Il est alors recteur de l'« université des prisonniers » et organise des cours pour ses collègues de camp.

Dans toute la géométrie actuelle (algébrique, différentielle, topologie), les notions et outils concoctés par Leray dans son camp de prisonniers en Autriche : faisceaux et suite spectrale, font partie de la boîte à outils de tout chercheur. De même, en géométrie de dimension infinie, pour le théorème du point fixe. La suite spectrale, par exemple, est à la base de l'étude de la topologie des espaces fibrés (voir par exemple la thèse de Serre). Utilisant la théorie des faisceaux créée par Leray, Cartan, Serre et Weil participent de ce que certains collègues étrangers ont appelé la révolution française des années 1950.

$$H_{s,t}(E) = \left[Ker\,(d\colon E_{s,t} \to E_{s-r,t+r-1})\right] / d\,(E_{s+r,t-r+1})$$

$$\cdots \longrightarrow H_q(F) \xrightarrow{i_*} H_q(X) \to H_{q-n}(F) \xrightarrow{d_n} H_{q-1}(F) \longrightarrow \cdots$$

$$E_\infty^{n,q} = E_{n+1}^{n,q} \approx \frac{Kernel\ d_n}{Image\ d_n} = \frac{Kernel\ d_n}{d_n\,(E_n^{2n,q-n+1})} \approx Kernel\ d_n$$

$$E_\infty^{0,q} = E_{n+1}^{0,q} \approx \frac{Kernel\ d_n}{Image\ d_n} = \frac{E_n^{0,q}}{d_n\,(E_n^{2n,q-n+1})}$$

La suite spectrale de Leray.

Il est passionnant de comparer l'œuvre de Leray et celle de Weil, couvrant toutes deux le siècle, de 1906 à 1998. Tous deux comptent parmi les plus grands mathématiciens de ce siècle. Destinées bien différentes, mais surtout tempéraments mathématiques entièrement opposés : Weil est motivé exclusivement par les mathématiques « pures », Leray est motivé par la mécanique puis la physique mathématique (hors de sa période de captivité).

Toujours sur la comparaison Weil-Leray, remarquons que leur influence fut différente. La renommée de Weil est établie, entre autres, comme père de Bourbaki, celle de Leray (et de Paul Lévy) a été plus forte à l'étranger qu'en France, sans doute en raison d'une œuvre à la lecture difficile, mais aussi à cause du retard global des mathématiciens français avant les années 1950. Le recul de l'Histoire aidant, on commence à mesurer la profondeur et la modernité de Leray.

L'équation de Navier-Stokes (Leray fut le premier à vraiment débloquer le sujet) demeure mal comprise et constitue, par son importance tant théorique que pratique, l'un des sujets concernés par le prix Clay d'un million de dollars (avec, notamment, la conjecture de Poincaré et l'hypothèse de Riemann). Disons, à la suite de Jacques-Louis Lions, que le problème principalement ouvert aujourd'hui consiste, en langage de tous les jours, à montrer que « lorsque l'on ouvre un robinet, l'eau va continuer à couler aussi longtemps que l'on veut (bien sûr, l'alimentation à la source est garantie), et sans turbulences ». Précisons en un mot la difficulté majeure en mécanique des fluides : contrôler ces turbulences. Leray parle du « problème des sillages » et du « problème des figures de proue ». Il s'agit dans la pratique de les éviter ; pour les hélices de bateau, ce sont des « cavitations ». Toute turbulence coûte de l'énergie, de la vitesse donc. Les ailes derrière certaines voitures sont faites pour éviter la turbulence ; les ailes d'avion sont très étudiées en ce sens. Les balles de golf sont trouées pour aller plus loin, avec moins de turbulence ; voir par exemple l'article dans *Pour la science*, hors-série nº 41, d'octobre 2003.

Une anecdote sur les personnalités de Stokes et Navier. Si Stokes était un homme assez fiable, Navier inspirait plus de méfiance ; cet ingénieur, membre de l'Académie des sciences, a certes été le premier à trouver la bonne équation (en EDP) décrivant l'évolution d'un fluide visqueux. Mais il voulut à tout prix construire à Paris, dans les années 1820, un pont suspendu. Ce pont de 155 mètres fut terminé en 1826, mais il commença à développer des fissures dans ses ancrages et il fallut finalement le détruire. Navier s'était trompé dans le calcul des forces exercées sur les câbles et la solidité des ancrages ; en outre, il avait omis la marge de sécurité de 10 %, un dogme absolu pour les ingénieurs, et, pire, n'avait fait réaliser aucune maquette (encore un autre dogme). La ville de Paris ne voulut pas intervenir. Une forte querelle s'ensuivit, tellement amplifiée en son temps que Balzac, dans *Le Curé de village*, en parle d'une façon qui peut nous paraître aujourd'hui exagérée. Lire Balzac, ou bien le remarquable texte qui raconte en détail toute cette histoire : Cannone et Friedlander (2003).

Le pont de Navier.

Laurent Schwartz (Paris 1915–2002) commence ses travaux en analyse fonctionnelle (étude d'espaces de fonctions), ce qui le conduit à être le créateur de la théorie des distributions (ce qui lui vaut la médaille Fields en 1950, l'une des deux premières d'après-guerre). On ne peut guère faire aujourd'hui d'analyse sans utiliser la théorie des distributions, outil souvent incontournable. Elle a permis de mettre dans le même cadre conceptuel de nombreux résultats précédents. Nous l'avons dit, c'est ce cadre qui intervient pour définir la transformation de Fourier dans sa plus grande généralité, et les notions, introduites par Leray et poursuivies par Sobolev, de dérivée généralisée et de solution faible d'une EDP. On lui doit aussi la théorie des applications radonifiantes, bâtie afin de pouvoir faire du calcul des probabilités dans des espaces de dimension infinie (difficiles à manier car non localement compacts). Ces travaux ont eu de l'influence sur la théorie des espaces de Banach.
On trouvera dans son autobiographie (Schwartz, 1997) pratiquement tout ce qu'il faut savoir de sa vie personnelle, politique comprise. Mais on complétera cette lecture, en particulier pour son œuvre scientifique, avec le volume que vient de publier la Société mathématique de France : Anné, Bourguignon et Viterbo (2003). Schwartz est dès ses débuts un membre très actif de Bourbaki, jusqu'à sa retraite fatidique fixée par le groupe, à savoir 50 ans.

Citons, pour juger de l'importance des distributions, cette phrase reprise de l'introduction de Lakatos (1976) : « Newton dut attendre quatre siècles pour que Peano, Russell et Quine l'aident à monter au paradis en formalisant le calcul différentiel, tandis que Dirac fut plus fortuné : son âme sera sauvée de son vivant par Schwartz » (rappelons que la distribution de Dirac, fonction impossible, vaut l'infini en l'origine, zéro partout ailleurs, son intégrale étant cependant égale à 1).

La transformation de Fourier $\mathscr{F}$ et sa conjuguée $\overline{\mathscr{F}}$ établissent entre les 2 espaces topologiques $(\mathscr{S}')x$ et $(\mathscr{S}')y$, 2 isomorphes réciproques ;

> si l'on identifie les variables x et y, $\mathscr{F}$ et $\overline{\mathscr{F}}$ définissent dans l'espace topologique $(\mathscr{S}')$ 2 automorphismes réciproques.

Le théorème « final » pour la transformation de Fourier.

Schwartz est le gendre de Paul Lévy, lui-même gendre d'Hadamard. La famille de Schwartz est proche de celle d'Hadamard ; ce dernier fut consulté pour l'orientation du jeune Schwartz à la fin de la classe de première : s'orienter vers la classe de philosophie ou celle de mathématiques ? Dans son autobiographie (1997), Schwartz explique qu'il avait songé à faire de la littérature grecque, ayant même, en première, rédigé 200 pages d'une grammaire grecque, celle du lycée lui ayant semblé mauvaise. C'est Hadamard qui trouva qu'il serait bon qu'il soit exposé, au moins durant un an, aux sciences. On voit qu'il y resta ! Une différence toutefois : si Hadamard est un expert international en fougères, Schwartz est expert en entomologie, précisément en papillons. Une espèce de papillon porte son nom ; pour apprécier ce fait, il importe de savoir qu'il est d'usage chez les entomologistes (mais aussi dans pratiquement toute discipline où l'on s'occupe de classification), lorsqu'on découvre un nouvel animal, de ne jamais lui donner son propre nom, mais celui d'un grand expert en la matière (Poincaré nomma ainsi « fuchsiens » les groupes qu'il découvrit). Sa biographie est passionnante à lire (quelques longueurs s'y trouvent, mais il vaut la peine de les dépasser). On y trouve aussi, dans le chapitre sur l'invention des distributions, des considérations importantes sur la création et l'inspiration en mathématiques, ainsi que dans Schwartz (1987).

À ce sujet, une anecdote personnelle : Schwartz explique dans son autobiographie qu'il ne « voit » pas en géométrie, même dans le plan. Cependant, il ne partage pas l'aversion d'Hermite pour la géométrie. Beaucoup de gens ne croient pas ce que dit Schwartz sur son manque de vision géométrique (même plane), considérant cela comme de la fausse modestie. Or, Schwartz m'avoua à ce sujet que, pour se servir du métro à Paris, il ne voyait pas les lignes se croiser, mais connaissait par cœur toutes les stations de toutes les lignes, et cherchait donc les stations de changement nécessaires de cette façon-là !

Schwartz était un professeur et un conférencier exceptionnel. Son cours de Polytechnique a toujours été qualifié par les élèves devenus chercheurs de magique. Il ne faut pas oublier ses élèves « directs » ; mentionnons-en deux en particulier : Jacques-Louis Lions et Bernard Malgrange.

Henri Cartan a contribué à l'essor mathématique en France, *via* l'École normale supérieure ; Schwartz tout autant, *via* l'École polytechnique, d'une part par son enseignement et d'autre part par les nombreux élèves qu'il débauche

vers la recherche, ce qu'il peut se permettre, ayant créé dans cette école en 1966 un centre de recherches mathématiques et grâce à son extraordinaire charisme d'enseignant. Le centre comporte un séminaire (on a vu combien cette institution, fondamentale pour une école de recherche, fut longue à s'implanter en France). Les premiers polytechniciens qui font partie de ce centre sont Delale, Bourguignon, Chenciner, Laudenbach, Thillaud et Michel Herman. Le fameux « séminaire sur les équations aux dérivées partielles », hebdomadaire, où parlent des orateurs venus du monde entier, fait beaucoup pour sa notoriété ; il est publié avec un magnifique papillon sur la couverture ! Si Schwartz se lance, en outre, dans l'installation d'un centre de recherches dans les locaux mêmes de l'école, c'est qu'il trouve dommage, voire dramatique, qu'aucun élève n'en sorte pour faire de la recherche, mathématique en particulier. Auparavant tous les grands mathématiciens français, de 1850 à 1950, furent des normaliens, à la double exception près de Poincaré et de Paul Lévy. La création du centre de recherche de Polytechnique est un très grand succès. Bref, « Schwartz fut un normalien amoureux de l'École polytechnique ». Sur ce qu'était l'enseignement et les programmes de cette école, lire le brillant chapitre IX de Schwartz (1997).

Schwartz a eu sa vie durant une activité politique intense : ayant signé (il en est l'un des instigateurs) le « Manifeste des 121 » pendant la guerre d'Algérie, il est alors (1961) chassé de sa chaire à l'École polytechnique (on n'avait pas vu cela depuis l'époque révolutionnaire, excepté pour un chimiste durant l'affaire Dreyfus, et sous Pétain pour des chaires au Collège de France…). Mais la communauté mathématique française se tient remarquablement les coudes, et la direction de l'école ne peut lui trouver de successeur ; Schwartz réintègre sa chaire dès 1964. Un autre membre de Bourbaki, Roger Godement, également signataire du Manifeste, voit son appartement plastiqué par l'OAS (les touches de son piano parsèment la rue de l'Estrapade).

Jacques-Louis Lions (Grasse 1928, Paris 2001) est également l'un des artisans de la renaissance des mathématiques françaises. Cela parce que c'est lui qui développe en France la branche des mathématiques dite des mathématiques appliquées. Les opinions divergent quant à savoir si cette discipline existe réellement. Pour nous, on l'a dit, cela n'a pas de sens. Il suffit de ne pas confondre les applications des mathématiques, exercices pour bons élèves mais qui ne sont pas vraiment de la recherche originale, et les mathématiques appliquées, recherches consistant à comprendre ce que veut tel ou tel collègue de physique ou autre science, à mettre en forme les données et à voir ensuite quelles mathématiques peuvent résoudre les problèmes posés. La réflexion fondamentale y est indispensable. Et l'on pourrait aussi bien parler de mathématiques orientées vers telle ou telle discipline plutôt que de mathématiques orientées vers les applications. Or, en France, cette branche était tombée, depuis Poincaré, dans un profond mépris de la part de tous les mathématiciens (à la remarquable exception de Leray), ce qui explique aussi pourquoi Leray ne fut connu en France que « trop tard ». Ce mépris s'appuyait sur un dogme absurde : on fait des mathématiques appliquées quand on s'aperçoit que l'on n'est pas capable d'en faire des « pures ». Lions est le premier à se lancer systématiquement dans ce domaine, grâce à son expertise en EDP, son énorme puissance de travail et sa facilité à comprendre de suite (chose très difficile) quelles sont les mathématiques nécessaires pour résoudre tel problème que lui pose tel physicien ou tel mécanicien des fluides.

L'influence du « père » Lions s'exerce de façon très variée : cours à Polytechnique, au Collège de France, séminaire du Collège de France, très nombreuses conférences à l'étranger. Mais Lions a aussi eu un très grand nombre d'élèves. L'école française des EDP reste aujourd'hui encore marquée profondément par ses « enfants, petits-enfants et arrière-petits-enfants ».

Son don exceptionnel pour appliquer les mathématiques est illustré par le nombre étonnant de postes qu'il a occupés dans les conseils scientifiques ou les conseils d'administration de diverses grandes entreprises : Dassault Aviation, Dassault Systèmes, Électricité de France, Péchiney, Gaz de France, France Télécom, Elf-Aquitaine, Saint-Gobain, Thompson. Il préside le CNES (Centre national d'études spatiales) de 1984 à 1992.

Il est aussi président de l'Académie des sciences de 1996 à 1998 et président de l'Union mathématique internationale de 1995 à 1998. C'est lui qui tient à faire de l'année 2000 « l'année mondiale des mathématiques ». Ses *Œuvres choisies*, en trois tomes, ont récemment paru chez EDP Sciences (Lions, 2003).

Paul Malliavin (né en 1925) devient célèbre du jour au lendemain pour avoir résolu le très vieux problème de la synthèse spectrale dans l'espace L_2 : il s'agissait du seul problème important encore non résolu dans la théorie des séries de Fourier. Son article paraît dans le deuxième volume des *Publications mathématiques* de l'IHES.

Puis il devient l'un des fondateurs, avec Jim Eells, Paul-André Meyer et le Japonais Ito, de la géométrie différentielle stochastique, qui commence avec l'étude du mouvement brownien, mais sur une variété riemannienne générale, pas seulement dans le plan ou l'espace ordinaire. Aujourd'hui, le calcul de Malliavin est connu dans toutes les salles de marché ; et sa théorie des équations différentielles stochastiques rétrogrades permet de mettre à jour les délits d'initiés. De nombreux articles de mathématiques financières, par exemple un article de Pierre-Louis Lions, sont consacrés au calcul de Malliavin. On peut aussi mentionner ses travaux sur l'équation de Monge-Ampère en dimension infinie.

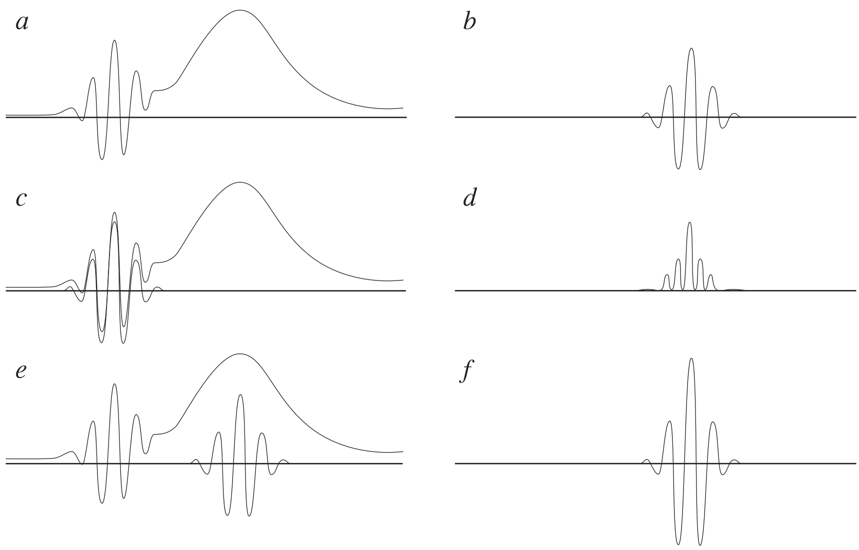
Si le mouvement brownien, à la suite de Wiener et Paul Lévy, est devenu facile à définir dans le plan ou l'espace ordinaire, il en va tout autrement dans des espaces géométriques plus généraux, notamment les variétés riemanniennes. L'étude du mouvement brownien dans ces variétés est en partie l'œuvre de Malliavin, mais il est allé beaucoup plus loin en entreprenant tout un calcul stochastique sur des variétés de dimension infinie, en particulier sur ces variétés très difficiles à étudier, mais basiques en géométrie, que sont les espaces de chemins.

Yves Meyer (né en 1939) est surtout connu pour avoir, l'un des premiers, travaillé sur la théorie des ondelettes. Il a fait une carrière d'analyste harmonique, c'est-à-dire consacrée à l'étude des espaces fonctionnels pour eux-mêmes (rappelons qu'ils sont de dimension infinie ; il faut donc être analyste, et pas seulement géomètre, pour les maîtriser).

Avant de parler de ses contributions aux ondelettes, nous ne résistons pas à l'envie de mentionner l'un de ses travaux qui concerne ce qu'il appelle les « vibrations des sphères ». On considère une sphère comme une fine membrane et l'on cherche à savoir comment elle vibre ou, ce qui revient au même, comment s'y propagent les ondes, les chocs donnés çà et là. Cette situation théorique n'est pas tellement éloignée de la façon dont réagit l'ensemble des océans de notre planète. Ceux-ci recouvrent en effet la majeure partie de la Terre ; quasiment la sphère tout entière, en première approximation. Yves Meyer a découvert qu'il existe des « chocs » initiaux qui, appliqués en un point de la sphère, se retrouvent, au bout d'un certain temps, au point de départ, après s'être trouvés en son point antipodal. Mais, d'une part, à chaque retour successif, l'ébranlement est de plus en plus fort (et de plus en plus concentré, pour satisfaire à la conservation de l'énergie) ; d'autre part, partout ailleurs qu'aux deux antipodes mentionnés, l'amplitude du raz de marée est pratiquement nulle. Ceci explique cela : un raz de marée survenu à la Martinique y était plus tard retourné, alors qu'il n'avait été remarqué nulle part ailleurs ! Bien sûr, il faut, lors des études, choisir soigneusement l'ébranlement de départ. On a vu que la propagation des ondes sur la sphère se résout avec la généralisation des séries de Fourier des fonctions périodiques ordinaires, *via* les harmoniques sphériques calculées par Legendre. Ce travail de Meyer n'est pas seulement amusant ; il a servi de point de départ à des travaux de Jacques-Louis Lions pour étudier les vibrations des grandes plates-formes spatiales.

L'histoire des ondelettes est une vraie saga, admirablement racontée, pour un large public, dans Burke Hubbard (1995), livre auquel nous renvoyons pour plus de détails. Ni les séries de Fourier, ni la transformation de Fourier ne sont suffisantes pour analyser les signaux de certains types. On connaît les fréquences, mais manquent alors les amplitudes, ainsi que les instants où les faits se sont produits. L'analyse par ondelettes est un nouvel outil ; il avait été créé par un pétrolier d'Elf-Aquitaine qui cherchait à interpréter les signaux des techniques classiques de sondage. Cet essai fut repris par Yves Meyer, parmi d'autres. Il s'agit d'un domaine où les applications pratiques sont légion, et d'une importance financière parfois considérable. Bourgain a toutefois montré que l'on doit compter, pour l'analyse par ondelettes, avec un principe d'incertitude, comme en mécanique quantique : on ne peut pas tout avoir.

Lorsque l'on parle d'analyse du signal, la seule dimension, c'est le temps. Mais le traitement des images, leur compression, leur reconstitution entrent dans un cadre à plusieurs dimensions.



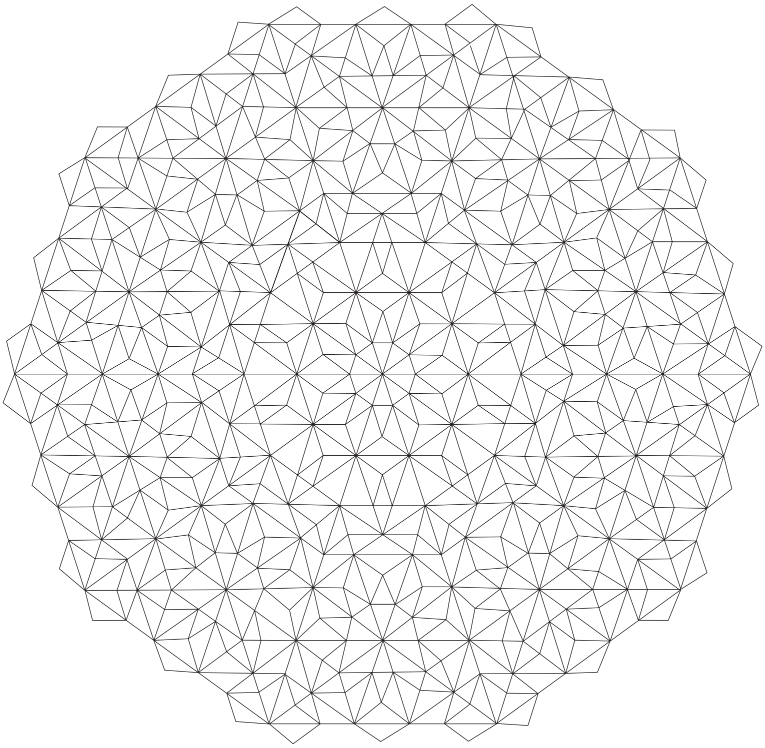
La transformation en ondelettes d'un signal *(a)* compare une ondelette *(b)* aux divers morceaux du signal *(c, e)*. Le produit d'un morceau du signal et de l'ondelette donne une courbe *(d, f)* ; l'aire située sous cette courbe est égale au coefficient d'ondelette (en grisé). Les morceaux du signal qui ressemblent à l'ondelette donnent de gros coefficients *(c, d)*, car le produit du signal et de l'ondelette est positif. Les morceaux qui changent lentement donnent de petits coefficients *(e, f)*, car les valeurs négatives compensent presque les valeurs positives. Les ondelettes font bien ressortir les variations du signal.

La compression de données est en progrès incessant. Il s'agit de reconstituer une image de 3 millions de pixels en n'en utilisant que 500. Avec Yves Meyer et ses élèves, on arrive maintenant à des reconstitutions bien meilleures que celles du système classique JPEG 2000 (voir plus haut, section 1 c). Cela depuis très peu de temps, avec le système dit « let it wave » (déjà mentionné plus haut) ; l'une des idées de base de ce nouveau système de compression-reconstitution consiste à pouvoir traiter des bords d'images dont la direction varie.

Alain Connes (né à Draguignan en 1947), après des travaux, en début de carrière, sur les algèbres d'opérateurs (étude des facteurs de type II et III), outil essentiel en analyse harmonique ou en physique théorique, entrevoit dès 1979 une façon nouvelle d'unifier plusieurs branches des mathématiques, la géométrie non commutative. Connes reçoit la médaille Fields en 1982 ; il est actuellement professeur au Collège de France et « professeur Léon Motchane » à l'IHES, et vient de recevoir la médaille d'or du CNRS.

Indépendamment de ses travaux proprement dits, Connes attache une grande importance à la réflexion épistémologique ; il a déjà publié deux livres à ce sujet : des dialogues avec le neuro-biologiste Changeux (Changeux et Connes, 1989), et des dialogues triangulaires avec Lichnerowicz et Schützenberger (Connes, Lichnerowicz et Schützenberger, 2000). Le dialogue avec Changeux est assez désespérant : chacun reste sur ses positions. Celle de Connes est platonicienne ; c'est-à-dire que les mathématiques existent en dehors de lui. Il faut aller les « chercher ». À l'opposé, pour Changeux, réductionniste absolu, les mathématiques sont une pure création de l'esprit humain ; les mathématiques des Martiens seraient (sont ?) complètement différentes. C'est un vieux débat, mais sa virulence n'est guère atténuée. Personnellement, nous pensons, ce qui n'est pas révolutionnaire, que la vérité se tient probablement entre les deux. Reste à connaître les bonnes proportions !

La géométrie algébrique est le royaume de la commutativité. Mais Connes découvre que nombre de problèmes de géométrie et plusieurs phénomènes de physique nécessitent une tout autre approche, car on y rencontre des espaces que l'on ne peut pas décrire, étudier, avec les outils d'auparavant : de là, la non-commutativité. Au lieu d'associer à un point, comme Grothendieck, une série d'idéaux convenables, on doit en effet, dans cette théorie, lui associer des opérateurs (dans l'espace de Hilbert), qui sont par essence non commutatifs. D'où une nouvelle notion de ce qu'est un point. Par exemple, Connes, en physique théorique, explique l'effet Hall quantique. Mais, surtout, il arrive au tour de force que voici : le modèle standard pour les particules élémentaires (quarks, par exemple), communément considéré comme essentiel, comporte, pour écrire les formules fondamentales qui le décrivent, une soixantaine de pages d'équations (sans parler des efforts ultérieurs pour résoudre ces équations). Connes résume ces soixante pages en une formule de trois lignes dans son ouvrage fondamental (nous faisons référence à l'édition anglaise, bien plus fournie que la française : Connes, 1994).



Un pavage de Penrose. En 1974, Roger Penrose découvrait un ensemble de deux pavés avec lesquels on pouvait paver la totalité du plan, mais jamais de façon périodique. Cela donna naissance à la théorie des quasi-cristaux, qui furent ensuite découverts expérimentalement. Pour le mathématicien, c'est un vrai problème que de classer l'ensemble des pavages de Penrose. On montre qu'ils sont en correspondance avec les suites de 0 et de 1 soumises à la condition qu'un 1 doit toujours être suivi d'un zéro. Ainsi, les deux suites extrêmes sont : celle toute entière composée de 0 et la suite 0101010101... Mais un espace fait de telles suites demandait d'être mathématiquement structuré. C'est ce que Connes a su faire avec sa « géométrie non commutative ».

Pour approfondir les conséquences de sa nouvelle vision des choses, Connes développe, seul ou avec ses élèves, d'autres notions, en particulier, en topologie algébrique, celle de cohomologie cyclique. Nous avons rencontré plusieurs fois, depuis Poincaré, les mots homologie, cohomologie. La cohomologie, ou l'homologie, d'un espace (géométrique ou algébrique) est un ensemble d'invariants attachés à cet espace. On a vu que la notion d'invariant est une parole sacrée en mathématiques : les trouver, les créer (les découvrir ?), les calculer constituent une bonne part de cette science.

Dans la lignée des prix Clay, Connes introduit enfin une idée nouvelle dans la quête du Graal qu'est la résolution de l'hypothèse de Riemann sur la fonction zeta.

Jean Bourgain (né à Ostende en 1954) est belge, comme Deligne, mais si nous l'incluons ici, c'est qu'il a été professeur permanent à l'IHES de 1985 à 1994. Il est maintenant professeur permanent à Princeton (IAS).

Il fait de nombreuses contributions décisives en EDP, de natures très variées (il obtient la médaille Fields en 1994). En théorie des systèmes dynamiques, il affine le théorème de récurrence de Poincaré. On lui doit aussi un principe d'incertitude pour les ondelettes (outil devenu incontournable lorsque la transformation de Fourier est trop imprécise), montrant que l'on ne peut pas en « faire n'importe quoi ». Il y a toujours un compromis à trouver pour l'analyse des signaux, voire de toute fonction, entre la modulation d'amplitude et la modulation de fréquence (la modulation de fréquence, c'est la transformée de Fourier de la modulation d'amplitude). Bourgain fait faire un bond spectaculaire au théorème de Birkhoff sur la récurrence « à la Poincaré » dans les systèmes dynamiques (toute notre vie est un système dynamique, tous les phénomènes autour de nous ; il s'agit d'étudier ce qui se passe quand le temps se développe) : en gros, Bourgain a démontré que, pour les systèmes dynamiques, on obtient des résultats « à la Birkhoff » qui, pour certains systèmes, affirment que la moyenne spatiale et la moyenne temporelle sont égales (système mélangeant, le mot savant étant ergodique). C'est capital en physique : une mesure en un seul point, mais suffisamment prolongée, assurera la connaissance de la densité cherchée dans tout le système. Ce que montre Bourgain, c'est que les observations n'ont pas besoin, comme il le fallait chez Birkhoff et ses successeurs, d'être faites à intervalles réguliers ; on peut les faire un peu « n'importe comment » et avoir cependant un résultat fiable. Un exposé « grand public » : Berger (1990).

Bourgain a fait œuvre de géomètre en construisant dans des espaces de grandes dimensions des ensembles convexes qui défient l'intuition. Un ensemble convexe semble un objet bien simple ; il reste pourtant beaucoup de mystères sur la nature, la structure de ces ensembles. Bourgain en a éclairci quelques-uns. Pour la convexité, voir Berger (2006), chapitre VII.

Dans la théorie des EDP non linéaires, Bourgain a enfin réalisé des progrès importants, en particulier dans l'équation non linéaire de Schrödinger, basique en physique quantique.

Pierre-Louis Lions (né à Grasse en 1956) est le fils de Jacques-Louis Lions ; il obtient la médaille Fields en 1994. Il est professeur au Collège de France et à l'École polytechnique. Comme son père, Pierre-Louis Lions est un expert des EDP et de leur utilisation dans des domaines variés. Il fait ainsi faire des progrès décisifs à l'équation de Boltzmann (et à d'autres équations « de transport », dans plusieurs situations d'importance pratique essentielle) : elle intervient dans les problèmes de transport, notamment la rentrée dans l'atmosphère d'une navette spatiale, car il y a des problèmes de transition entre le vide spatial, la rencontre avec des atomes très disséminés et l'atmosphère proprement dite. Depuis longtemps, les EDP linéaires sont bien comprises, mais les EDP « de la réalité » ne sont jamais vraiment linéaires. Par exemple, l'équation des cordes vibrantes, résolue par d'Alembert, est celle de la première approximation du mouvement de telles cordes. Mais il faut aller plus loin, surtout avec les exigences modernes (aviation, satellites…). Ses travaux concernent aussi le problème de l'équation de Navier-Stokes. Il a créé des techniques nouvelles : la méthode de viscosité, la notion de vitesse moyennée et les méthodes de compacité concentrée et de compacité par compensation. Rappelons brièvement que le problème fondamental en analyse est d'arriver à fabriquer des objets convergeant vers la solution cherchée ; cela arrive facilement dans des espaces compacts, en dimension finie (même très grande), alors que les espaces en analyse sont presque toujours de dimension infinie. Il faut donc arriver à contourner cet obstacle, ce que Leray a initié avec, on l'a vu, la notion de solution faible ; voir aussi les distributions de Schwartz.

$$\partial_t\rho + \mathrm{div}(\rho u) = 0$$
$$\partial_t(\rho \mathrm{u}) + \mathrm{div}(\rho u \otimes u) - \mu\Delta u - \xi\nabla \mathrm{div}(\mathrm{u}) + \mathrm{a}\nabla\rho^\gamma = \rho f,$$
$$\text{avec } \mathrm{a} > 0, \gamma > 1, \mu > 0, \mu + \xi > 0.$$

Équations de Navier-Stokes compressibles.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v.\nabla_x f = \mathrm{Q}(f,f)$$

$$\mathrm{Q}(f,f) = \int\int_{\mathrm{R}^3\times \mathrm{S}^2} \mathrm{d}v_* \,\mathrm{d}\omega \mathrm{B}(v - v_*, \omega)\{f'f'_* - f f_*\}$$

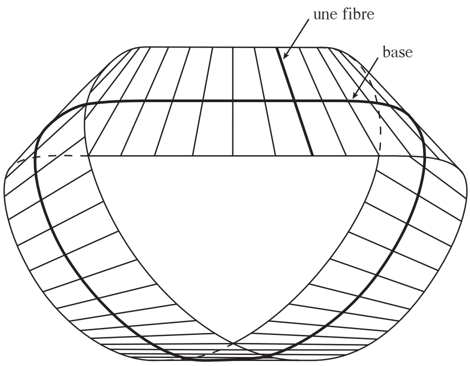
L'équation de Boltzmann.

Pierre-Louis Lions occupe une place charnière dans la mutation actuelle des mathématiques : ses travaux illustrent en effet les interactions croissantes entre les mathématiques et les autres domaines de la science, tant en profondeur et en volume pour chaque science qu'en nombre de domaines où ces interactions ont lieu. Comme son père, il travaille à des études industrielles, à peine sorti de l'École normale. Le calcul électronique y joue un rôle important. Il faut, pour lui, aborder les deux bouts de la chaîne : recherche pure et applications. Il se considère comme un disciple de Leray.

Géométrie, systèmes dynamiques

Charles Ehresmann (Strasbourg 1905, Amiens 1979) a une œuvre double de géomètre. D'une part, en topologie algébrique, il calcule l'homologie des variétés de Grassmann, tant réelles que complexes, en introduisant entre autres la notion de cycle de Schubert. Le fait que, dans les variétés de Grassmann complexes, il n'y ait pas de torsion (c'est-à-dire d'éléments dont une puissance s'annule) joue un rôle très important : c'est grâce à cela que Chern peut définir « ses » fameuses classes caractéristiques, dites aujourd'hui classes de Chern, qui conditionnent une grande partie de toute la géométrie actuelle.

D'autre part, il est l'un des fondateurs, avec Steenrod et Feldbau, de la théorie des espaces fibrés. Mais il met aussi en forme le langage d'Élie Cartan sur les connexions infinitésimales dans les espaces fibrés, les plus généraux. C'est lui qui permet de comprendre réellement la vision d'Élie Cartan, trop prophétique jusque-là pour être réellement comprise.

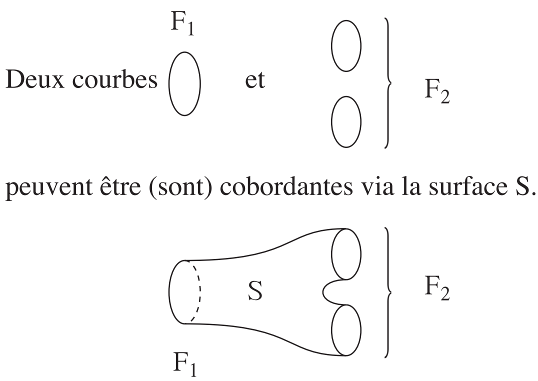


La bande de Möbius est un espace fibré non trivial, tandis que le cylindre est trivial. Un espace fibré comprend l'espace total, la base et les fibres. Les fibres doivent être identiques, et d'autre part, *localement*, les choses doivent être triviales, comme dans un espace produit ; ce qui est intéressant et qui peut varier, c'est la façon globale dont les fibres s'agencent sur la base.

Aujourd'hui, on ne peut guère faire de géométrie sans espaces fibrés ; en outre, les espaces fibrés sont essentiels en topologie algébrique, dans l'œuvre de Thom par exemple. Ehresmann est aussi l'un des pères fondateurs de la théorie des catégories.

Géomètre, topologue, fondateur de la topologie différentielle, fondateur de la théorie des catastrophes, épistémologue, philosophe, voici ***René Thom*** (Montbéliard 1923, Bures-sur-Yvette 2002). Thom a parcouru le monde et les disciplines en posant à ses collègues, dans des matières telles que la physique, l'histoire, la biologie, la chimie, des questions parfois irritantes. Dans tous les domaines qu'il aborde, il introduit une approche originale, posant des questions souvent peu abordées (car trop difficiles à ce moment-là ?). Il fut « le mathématicien qui posait aux autres disciplines des (les ?) bonnes questions ». On trouvera tout cela dans ses *Œuvres complètes*, tant en mathématiques qu'ailleurs, en CD-rom, disponibles auprès de l'IHES : <http://www.ihes.fr/~cdthom/lettre.html>. On trouvera dans Anné, Chaperon et Chenciner (2005) d'excellents textes de et sur Thom.

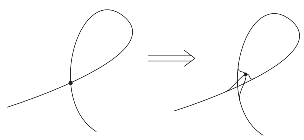
Élève en thèse d'Henri Cartan à l'ENS, qui sut respecter son originalité profonde et le laissa « s'isoler à Strasbourg », Thom fait faire, de 1952 à 1960, des progrès décisifs à la théorie des variétés différentielles, précisément à leur topologie. Il réussit à classer ces variétés dans les classes de cobordisme. Il étudie aussi la possibilité de réaliser un élément de la topologie algébrique d'une variété par une sous-variété plongée. Cette notion de cobordisme semble enfantine mais, entre les mains de Thom, elle devient un outil d'une puissance redoutable : la théorie du cobordisme permet de classer en un sens apparemment grossier mais capital les variétés (différentiables). Deux variétés sont cobordantes si on peut les relier par un tube après avoir fait dans chacune un petit trou. Toutes les courbes fermées sont cobordantes, quel que soit le nombre de leurs morceaux, mais dans les dimensions supérieures, les choses changent radicalement. La topologie différentielle consiste ainsi à « réunir Poincaré et Élie Cartan ». Pour ces travaux, il reçoit la médaille Fields en 1958. Professeur à l'université de Strasbourg de 1954 à 1963, il est professeur permanent à l'IHES de 1963 à 1988.



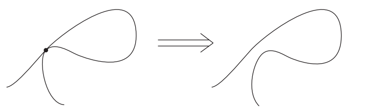
Deux figures (de même dimension) sont dites cobordantes s'il existe une troisième figure (d'une dimension de plus) dont le bord est composé de deux parties, l'une étant la première figure et l'autre la seconde. Dans le cas des courbes fermées, toutes les courbes sont cobordantes, mais dans les dimensions supérieures, les choses deviennent plus complexes : toutes les figures ne sont pas cobordantes.

Pour fonder solidement le cobordisme, Thom a besoin d'une théorie de la transversalité, une mise en forme rigoureuse mathématiquement, et en dimension quelconque, de ce que montrent les dessins : si deux courbes ayant un point en commun ont en ce point des tangentes différentes, alors, quelles que soient leurs variations locales, les deux nouvelles courbes auront toujours un point commun (et un seul) dans le voisinage du point commun initial. Même chose pour une courbe et une surface ou pour deux surfaces (au lecteur de trouver les conditions analogues). Techniquement, le théorème de transversalité tient du miracle : il n'y intervient pas de contrainte d'intégrabilité ! Dans l'exemple le plus simple de courbes planes (applications d'une droite dans un plan), un point double à tangentes distinctes est générique, mais ce n'est pas le cas pour un point de rebroussement, qui s'éliminerait facilement.

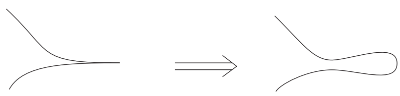
Le cas le plus simple de la transversalité. On ne peut pas faire disparaître ce point « double » par une petite déformation, quelle qu'elle soit.



Par contre, ce point de tangence est facilement éliminable.



ou encore



La transversalité pour les courbes planes.

Dans le cas des applications d'un plan sur un plan, il n'y a que deux singularités génériques, le pli et la fronce, cela est dû à Hassler Whitney. La plus simple des singularités stables rencontrées dans la pratique est celle de la caustique des rayons lumineux à l'intérieur d'un bol, fût-il de cuisine. L'important est qu'il n'y ait qu'un nombre fini de telles singularités stables. Thom leur a donné d'agréables noms.

La transversalité caustique.

Les sept « catastrophes » élémentaires.

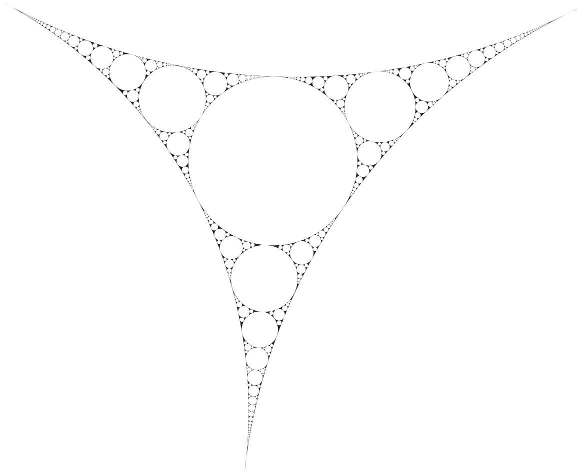
Riche des concepts, qu'il fonde, de transversalité et de stabilité, Thom fonde alors la théorie des catastrophes. L'idée de base est que l'on ne voit, dans la réalité tant mathématique que physique, que des singularités (les points singuliers des courbes, les plissements d'une surface...), stables par petites déformations. Il faut pour établir cela des mathématiques que Gromov appelle robustes. En ce sens, c'est un continuateur direct de Poincaré. Mais l'idée finale est que ces singularités qui subsistent et ne changent pas de nature, sinon par petites déformations (déformations dites locales), expliquent les ruptures appelées « catastrophes ». Toute la nature en est jalonnée : de l'embryogénèse au déferlement des vagues.

Si la théorie des catastrophes a donné lieu à des controverses, âpres même si maintenant calmées, c'est que de par sa nature topologique, donc non métrique, elle ne peut guère donner lieu à des prédictions quantitatives. Certains épigones de Thom s'y essaieront pourtant, tel Zeeman, qui « démontre » avec cette théorie que les mutineries dans les prisons seraient moins fréquentes si le système était plus sévère !

Thom est le seul mathématicien à avoir prolongé systématiquement la nature profonde des mathématiques dans une recherche philosophique approfondie, remettant, entre autres contributions de philosophe et d'épistémologue, Aristote à sa juste place dans la science contemporaine. On lui doit en effet une œuvre capitale en philosophie aristotélicienne, probablement trop prophétique encore. Son idée directrice est d'appliquer la forme de pensée de la recherche mathématique à la philosophie.

Parmi ses œuvres : *Stabilité structurelle et morphogénèse* (1972)
Prédire n'est pas expliquer (1991)

Benoît Mandelbrot (né à Varsovie en 1924) n'est certes pas le premier à avoir rencontré des ensembles fractals, mais il a mis en œuvre une organisation, une publicité intense pour plusieurs objets de nature fractale, dans un livre célèbre (Mandelbrot, 1977). Mais les objets fractals avaient déjà été rencontrés par Hadamard, Klein, Hausdorff, Peano ou Poincaré. Le sujet reste cependant très difficile ; la baderne d'Apollonius possède ainsi une dimension de Hausdorff qui reste inconnue à ce jour : cette dimension est la caractéristique qui mesure combien l'objet considéré est fractal, combien il est « méchant », « affreux » aux regards ordinaires. La dimension de Hausdorff mesure en quelque sorte l'infini des fractals. Pour le fractal classique, appelé « flocon de neige », cette dimension sera de 4/3, alors qu'elle vaut, comme on s'y attend, 1 pour les courbes « raisonnables » (celles où intervient une notion de vitesse). Notons que Benoît est le neveu de Szolem Mandelbrojt (Varsovie 1899, Paris 1983) qui fut analyste, tant dans le domaine réel que complexe et harmonique, et fut professeur au Collège de France de 1938 à 1972.



La baderne d'Apollonius.

Ayant publié tous ses ouvrages sans jamais le moindre énoncé formalisé, ni *a fortiori* une démonstration, Mandelbrot a longtemps été rejeté. Serre fut l'un des rares mathématiciens professionnels à voir tout de suite qu'il s'agissait là de contributions importantes pour l'avenir.

Le Belge ***Jacques Tits*** (né à Uccle en 1930) a fondé un concept entièrement nouveau pour étudier « géométriquement » les groupes de la géométrie, surtout pour les groupes dits « exceptionnels » : le concept d'immeuble. Il peut ainsi unifier la théorie des groupes nouveaux découverts par Chevalley et progresser dans la compréhension des groupes algébriques. Ce qui a des conséquences importantes en théorie des nombres. Tits allie, pour le meilleur, l'algèbre et la géométrie. Après des études en Belgique puis un poste de professeur à Bruxelles, Tits, qui n'aime pas donner des cours d'université à des étudiants de premier cycle, accepte volontiers un poste de professeur à l'université de Bonn. Mais il devient finalement professeur au Collège de France, ce qu'il accepte avec joie, n'ayant pratiquement plus de cours à donner, sauf au niveau qu'il désire.

L'étude de l'immeuble de tel ou tel groupe, lorsqu'il s'agit de groupes sur des corps finis, permet de « dévisser » leur structure. C'est très utile en théorie des nombres, dans la lignée des groupes algébriques qui jouent un rôle intermédiaire entre les groupes finis et les groupes de Lie. Tits est l'expert des géométries exotiques qui, depuis leur création par Élie Cartan, ont toujours demandé des efforts énormes en termes de compréhension. Cette vision profonde lui permet d'éclairer plusieurs objets notoirement peu clairs, comme le réseau de Leech, réseau en dimension 24, unique et splendide. Tits a pu en donner plusieurs descriptions, qui simplifient considérablement son étude. Pour se faire une idée de la densité de ce réseau, signalons que si l'on met une sphère de rayon unité en chacun de ses points, chaque sphère sera touchée par 196 560 voisines : il est difficile de se faire une intuition avec de si grandes dimensions ! Mais surtout, en liaison avec ce réseau, il existe un groupe fini simple appelé le monstre, ayant la bagatelle de

$$808017424794512875886459904961710757005754368000000000$$

éléments ! Il faut savoir que ce groupe est le plus compliqué des groupes finis simples, mais aussi qu'il est l'objet d'un phénomène nouveau en mathématique. Tous les experts considèrent que les groupes finis simples sont connus : il y a des séries infinies comme en groupes de Lie, et des groupes exceptionnels en nombre fini, le *monstre* étant le dernier et le plus grand d'entre eux. Mais il reste aujourd'hui encore des morceaux à compléter pour que cette démonstration soit complète, un petit millier de pages (l'état actuel des travaux à ce sujet comprend déjà plusieurs milliers de pages). La conjecture de Kepler sur les empilements des sphères les plus denses est aussi considérée comme « démontrée », mais demande encore quelques travaux de plus pour que l'on y voie vraiment clair. Le fameux théorème des quatre couleurs a lui aussi une démonstration « complète » qui laisse des doutes à certains. On ne sait pas si ce genre de résultats « seulement pratiquement démontrés » va se développer ou non.

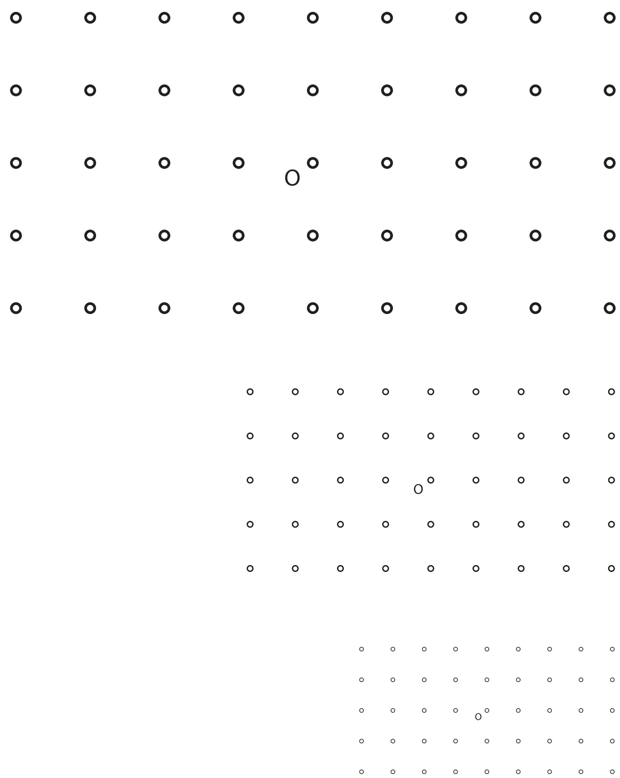
La notion d'immeuble est difficile à définir ; nous n'en connaissons pas de définition simple. Les pièces des immeubles sont, elles, faciles à définir, par exemple les triangles, mais ce sont les conditions de raccordement qui sont les plus subtiles à déterminer. Comme on l'a dit un jour : « Il n'y a pas d'intimité dans les immeubles de Tits. »

Si un mathématicien illustre bien le mot de Dieudonné : « la domination universelle de la géométrie », c'est bien le mathématicien qui venait de Leningrad : ***Mikhael Gromov*** (né à Leningrad en 1943) n'est comparable, tant en largeur et en profondeur que par son approche à la fois intuitive et géométrique, qu'avec Riemann et Poincaré. C'est un visionnaire, doué à la fois d'une intuition légendaire et d'une technique hors du commun. Après une thèse à Leningrad, il quitte la Russie, mais, en transit à Rome pour Israël, le géomètre James Simons, directeur du département de mathématiques à Stony Brook, campus de l'université de l'État de New York, de passage, apprend sa présence. Il obtient immédiatement par téléphone de son président une chaire pour Gromov. En 1980, il est professeur à l'université Paris VI (Pierre et Marie Curie), puis

l'IHES se l'attache comme professeur permanent en 1982. À notre connaissance, il n'existe pas de texte sur la vie de Gromov, hormis un simple article de journal (Meier-Rust, 1999). Mais on pourra consulter son interview dans Ripka (2002), livre passionnant à tous points de vue. L'un des violons d'Ingres de Gromov est la gymnastique de haut vol, notamment le funambulisme.

Une citation à son propos (Ebin, 1972) : *« Misha Gromov a frayé plusieurs routes, certaines sont des autoroutes, d'autres sont des avenues, et d'autres des cols de montagne à vous couper le souffle. »*

Gromov réussit à résoudre toutes les questions ouvertes auxquelles il s'attaque en parvenant à les inclure dans sa vision géométrique personnelle, qu'il s'agisse de géométrie aussi bien que d'algèbre ou d'analyse. Mais au prix, si j'ose dire, d'une montée dans l'abstraction, par la création de nouveaux concepts inconnus jusqu'alors. Nombre de disciplines où il a imprimé sa marque auraient dû, sans lui, attendre fort longtemps pour progresser aussi vite qu'elles viennent de le faire.



Réseaux de plus en plus fins, à la limite on obtient tout le plan (continu !).

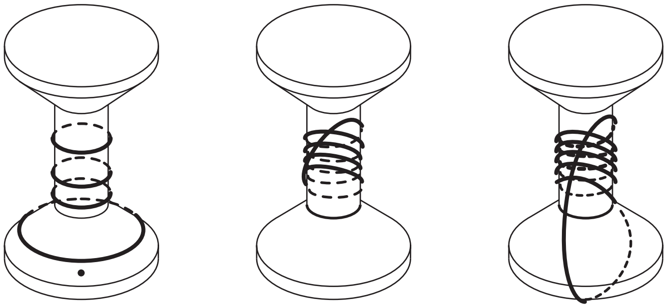
Il démontre une vieille conjecture que personne ne savait comment aborder, à savoir que les groupes à croissance polynomiale sont des sous-groupes discrets de groupes de Lie nilpotents. Pour ce faire, il utilise une technique révolutionnaire : regarder un objet discret, comme un grillage (par exemple le réseau Z^2), mais en se mettant à l'infini ; on obtient alors un objet continu (nous avons dit plusieurs fois, à la suite de Weyl, que « les mathématiques sont la science de l'infini »). Une précision : les groupes dont il est question ici sont des groupes discrets, leurs points sont en quelque sorte isolés, à l'opposé des groupes de Lie que nous avons rencontrés chez Élie Cartan.

À partir de 1978, Gromov révolutionne complètement la géométrie riemannienne, alors relativement bloquée, « tuant » presque tous les problèmes restés ouverts : pincement autour de zéro, pincement négatif, compacité, limites (notion d'écrasement) des variétés riemaniennes. Pour ce faire, Gromov ose considérer et structurer rien moins que l'espace de toutes les variétés riemanniennes. Il est le premier à comprendre la signification profonde de la courbure de Ricci. Dans la démonstration en cours faite par Perelman (avec un probable succès) de la conjecture de Poincaré (pour la sphère de dimension trois, l'un des sujets du prix Clay), les outils forgés par Gromov sont (seront) sans nul doute indispensables.

Il révolutionne également la géométrie symplectique grâce au concept de courbe pseudo-holomorphe. Cette géométrie inclut dans un cadre plus large celle de la mécanique analytique, ainsi que de nombreuses situations de physique ; d'après Gromov, si la géométrie riemannienne a dominé au XXe siècle, le XXIe sera celui de la géométrie symplectique.

Il révolutionne encore la théorie des groupes discrets avec plusieurs concepts : celui de groupe hyperbolique (et plus généralement d'espace métrique hyperbolique), et surtout celui de groupe pris au hasard. Ici encore, cela nécessite des structures du type de l'espace de tous les groupes. Voir, entre autres, Ghys et La Harpe, (1990) et Ghys (2004) et Pansu (2003).

Il bouleverse (en un domaine qui reste encore cependant mal connu) la topologie algébrique en y introduisant des méthodes quantitatives, ce qui lui permet d'obtenir pour la première fois des inégalités entre aires, longueurs, volumes de différents objets riemanniens. Cela lui permet de résoudre un problème fondamental dans l'étude des géodésiques périodiques des variétés riemanniennes.



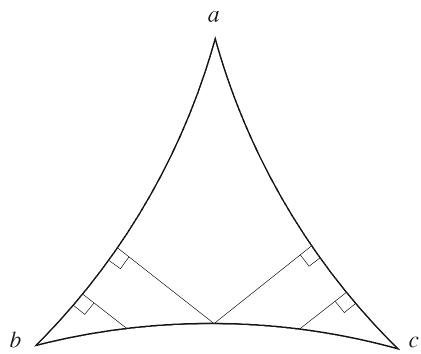
Une idée de Gromov que tout le monde peut comprendre, mais qui paraît tout autre une fois passée entre ses mains : sur la figure de gauche, on voit une courbe fermée qui peut être « ôtée » de la surface en la faisant glisser par dessus la bosse. On a sur la figure du milieu une courbe qui tourne autour du centre un grand nombre de fois (un milliard ?). On peut aussi l'ôter de la surface, mais il faudra alors allonger terriblement la courbe, au risque qu'elle casse, même s'il s'agit d'un élastique. L'idée de Gromov est de faire passer chacun des tours successivement (et pas tous à la fois !) par-dessus la bosse ; jamais la longueur totale de l'opération ne dépassera une borne raisonnable. C'est ainsi que Gromov fait faire au problème des géodésiques périodiques des surfaces un progrès presque définitif depuis Birkhoff en 1913.

La topologie algébrique quantitative a encore de gros progrès à faire, ce qui explique que la théorie des catastrophes de Thom ne soit pas encore prédictive, ce que de nombreux collègues lui reprochent comme dirimant. En calcul des probabilités, Gromov généralise le phénomène de concentration de Paul Lévy aux variétés riemanniennes à courbure de Ricci minorée et à d'autres situations, dont certaines rencontrées en biologie.

« C'est incroyable ce que Gromov peut faire avec la simple formule $d(x,y) \leq d(x,y) + d(y,z)$. » (D. Sullivan)

Gromov, mathématicien admiré...

Gromov introduit dans un espace géométrique la notion de triangle mince, lorsque tout point qui appartient à l'un des côtés du triangle est à petite distance de l'un ou l'autre des deux autres côtés. Quand cela arrive, avec une petitesse d'ordre universel, on dit que l'espace est hyperbolique. Les groupes dont la géométrie associée (découverte par Cayley) est hyperbolique sont également dits hyperboliques. L'une des découvertes les plus extraordinaires de Gromov, c'est que presque tous les groupes pris au hasard dans l'ensemble de tous les groupes sont hyperboliques (c'est-à-dire que la probabilité est égale à 1).



Les triangles idéaux sont ceux dont les trois sommets sont à l'infini, mais dont les côtés, eux, sont bien réels, même s'ils sont de longueur infinie. Ce qui ne les empêche pas de rester minces. Un triangle est ∂-mince quand cette distance est toujours $\leq \partial$.

Enfin, Gromov utilise depuis quelques années sa vision géométrique pour attaquer des problèmes complètement ouverts en biologie moléculaire. Sa conception de la biologie reste encore trop prophétique pour que les spécialistes puissent d'ores et déjà en profiter. Mais l'IHES a passé des contrats avec différents organismes de biotechnologie. Plus précisément, il propose, *via* la géométrie, de nouveaux modèles de description de la complexité (notion actuellement essentielle, en particulier au vu de l'algorithmique des moyens de calcul électronique en temps réel), la conduisant vers un niveau de généralité universel, et vers une activité pluridisciplinaire centrée sur la biologie moléculaire.

Gromov est encore trop en avance (comme l'ont été de nombreux grands mathématiciens), surtout en analyse. En particulier, des spécialistes des EDP redémontrent encore de tout petits morceaux de son livre de base, *Partial Differential Relations*, parce qu'ils continuent presque tous à l'ignorer. Nous reconnaissons volontiers que cet ouvrage est d'un abord difficile. Ce n'est que depuis peu que des ouvrages commencent à le « réécrire » en détail : Eliashberg et Mishachev (2001) ou Spring (1997).

Gromov incarne l'un des plus grands « ratés » des comités de la médaille Fields, probablement le plus spectaculaire (ne pas oublier qu'il n'avait pas quarante ans quand il a publié nombre des travaux mentionnés ci-dessus). En revanche, la liste de ses « autres » prix est spectaculaire : Veblen Prize (AMS, 1981), prix Élie Cartan (Académie des sciences, 1984), prix des UPA (Paris, 1989), prix Wolf (1993), Steele Prize (AMS, 1999), prix Balzan (1999), prix Lobachevski (2000), grand prix du Japon (Kyoto, 2002). Pour plus de détails sur son œuvre, voir Berger (1998) ou encore Berger (2002), extrait d'un livre que l'on pourra lire en entier pour avoir un petit panorama des mathématiques actuelles.

Michel Herman (New-York 1942, Paris 2001) se rend célèbre par sa thèse où il démontre un résultat longtemps cherché, conjecturé explicitement par Arnold, au sujet d'un problème abordé par Poincaré et Denjoy sur les difféomorphismes du cercle, c'est-à-dire les applications d'un cercle sur lui-même, applications qui ont des dérivées et sont bijectives. Il s'agit de savoir si l'on peut changer de paramètre sur le cercle pour que notre difféomorphisme devienne tout simplement une vraie rotation euclidienne. La démonstration est d'une incroyable complexité. Il y fait appel à la renormalisation, bien connue des physiciens théoriciens. Notons l'usage du théorème de Baire (théorème fétiche de Herman), ainsi que de la théorie des fractions continues pour réellement circonscrire le problème.

Herman entre à l'École polytechnique en 1963 comme élève étranger (il devient français en 1970) ; séduit par les cours de Schwartz, il est l'un des premiers polytechniciens à profiter, pour faire de la recherche, du centre que vient d'y créer ce dernier. Il soutient sa thèse en 1976 avec Alex Rosenberg et fait toute sa carrière au CNRS. On trouvera dans la *Gazette des mathématiciens*, numéros 88 et 89, d'avril et juillet 2001, de nombreux témoignages sur l'homme et des analyses de son œuvre scientifique. Il est l'un des artisans du renouveau en France de la théorie des systèmes dynamiques (pas seulement celle du système solaire !) ; Yoccoz a été son élève.

Dans le domaine de la mécanique hamiltonienne, plusieurs résultats importants lui sont dus. Il découvre ainsi une résonance mystérieuse. La question qui passionne les chercheurs de ce domaine, même s'il s'agit de millions, voire de milliards, d'années est celle de la stabilité du système solaire. Cette question est liée à celle des résonances, c'est-à-dire des proportionnalités rationelles (i.e. des fractions à numérateur et dénominateur qui sont des nombres entiers) entre les périodes des trajectoires des planètes. Un mot sur la notion de résonance ; il s'agit d'un concept essentiel, tant en théorie qu'en pratique. On démontre sans peine que lorsqu'un système, vibrant naturellement à une fréquence donnée, est soumis à une action extérieure ayant la même fréquence, la vibration devient alors infinie ; dans la pratique, ou dans le système solaire, il y a seulement des amplitudes extrêmement fortes, qui peuvent mener à des destructions. Plus précisément, les fréquences n'ont pas à être égales, il faut seulement que leur rapport soit un nombre rationnel. L'exemple type est celui d'une troupe marchant au pas sur un pont suspendu ; le pont de Tacoma a été entièrement détruit parce qu'un vent latéral fut assez régulier pour le faire osciller jusqu'à sa rupture. On retrouve aussi les résonances dans les caténaires de trains, surtout les TGV. Il faut éviter à tout prix que le câble d'alimentation ne commence à vibrer en résonance au passage du pantographe du TGV. Pour ce faire, on plante les poteaux à intervalles irréguliers, on suspend les fils avec des isolateurs de tailles différentes et implantés différemment, etc. Le brevet TGV vendu au Japon pour son deuxième TGV (plus rapide que le premier, le « Shinkansen ») oublia de préciser la nécessité d'une irrégularité dans l'implantation des poteaux ; durant trois mois, les essais cassèrent systématiquement les caténaires, avant que l'on n'en découvre la raison : les poteaux étaient plantés trop régulièrement.

Outre ses contributions personnelles, Herman a une influence considérable sur le développement des recherches en mécanique céleste, en mettant en place à Paris dès les années 1980, à la suite d'un cours à l'École normale supérieure, un séminaire dans cette discipline. Il structure fortement les recherches à ce sujet. Notons aussi le résultat de Laskar sur la stabilité du système solaire ; on en trouvera un exposé dans Marmi (2000) ou dans Laskar (1989). Ces travaux nécessitent un usage intensif d'ordinateurs : voir par exemple Chenciner et Simó (1996).

Mais Herman a travaillé aussi avec succès dans bien d'autres systèmes dynamiques que les difféomorphismes du cercle : la dynamique sur les tores et, sujet en pleine explosion depuis les vingt dernières années, la dynamique holomorphe.

Jean-Christophe Yoccoz (né en 1957) obtient la médaille Fields en 1994. Expert en systèmes dynamiques, il est l'élève de Michel Herman. Après sa thèse, en 1985, il est professeur à l'université d'Orsay, jusqu'à son élection en 1996 au Collège de France. Le mieux, pour introduire les travaux de Yoccoz, est sans doute de retranscrire ici une citation d'Edgar Allan Poe, que lui-même cite quand il désire expliquer le genre de mathématiques qu'il fait : « *It should be considered that the most trifling variation in the facts of the two cases might give rise to the most important miscalculations by diverting thoroughly the two courses of events ; very much as, in arithmetic, as well as which, in its own individuality, may be inappreciable, produces at length, by dint of multiplication at all points of the process, a result enormouly at variance with truth* » (*Le Mystère de Marie Roget*). Il s'agit là d'une prodigieuse anticipation de la théorie du chaos et de la sensibilité aux conditions initiales !

Dans l'esprit de son maître Herman, Yoccoz poursuit l'étude ultrafine des difféomorphismes du cercle. Les applications pour l'étude de la stabilité du système solaire sont, là encore, nombreuses ; il s'agit de savoir si l'on affronte des problèmes de résonance.

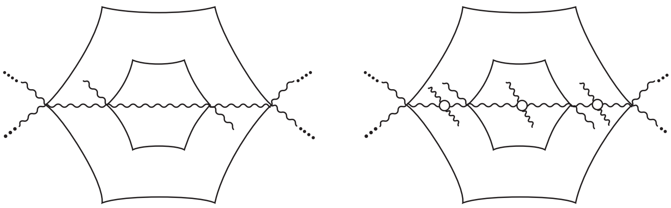
Mais il étudie aussi la dynamique complexe de dimension 1, sujet toujours d'actualité depuis Julia. Dans le plan complexe, on se demande également quel est le rapport entre l'application :

$$F : z \longrightarrow a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots$$

et l'application toute simple :

$$z \longrightarrow a_1 z$$

L'étude de ce rapport, qui semble enfantine, est en fait aussi fine que celle des difféomorphismes du cercle ; on y voit apparaître les différentes natures des nombres irrationnels.



Pour les études que fait Yoccoz des figures fractales, il faut élaborer une théorie ; voici quelques-uns des schémas simplificateurs, des graphes, qui sous-tendent ces dessins continus.

Ensembles de Julia pour $z^2 - 0{,}003/z^2$ et $z^2 - 0{,}32/z^2$

Maxim Kontsevitch (né à Khimki en 1964), soutient, après des études à Moscou, sa thèse à Bonn. Après des séjours à Harvard, au Max-Planck Institut de Bonn puis à l'IAS de Princeton, il est professeur à Berkeley de 1993 à 1996, et enfin professeur permanent à l'IHES depuis 1996. Il reçoit la médaille Fields en 1998. Ses travaux intéressant aussi les physiciens théoriciens, il reçoit en 1997 le prix Yagolnitzer, décerné par l'International Association of Mathematical Physics.

Kontsevitch fait faire des progrès substantiels à quatre problèmes très étudiés, très convoités, de la géométrie. Ces travaux concernent plus ou moins directement la physique mathématique actuelle. Il démontre d'abord une conjecture de Witten qui fournit un lien (admirable de par son caractère insoupçonnable) entre les nombres d'intersections de courbes complexes et les équations de Korteweg-de Vries (du type des équations dites « solitons ») ; c'est la formulation mathématique, et généralisée bien sûr, d'ondes étonnantes découvertes dans un canal anglais : des ondes qui se perpétuent sans s'atténuer sur de longues distances (en outre, quand deux de ces ondes se croisent, elles ne se mélangent que temporairement, chacune reprenant ensuite sa forme, de manière inchangée).

Dans la théorie des graphes et des nœuds, Kontsevitch introduit un concept nouveau : la cohomologie des graphes. Grâce à la notion de stabilité, il arrive ensuite à calculer le nombre de courbes algébriques rationnelles plongées dans une variété algébrique quelconque, qui sont de degré donné. Quatrième contribution : il réussit à quantifier (formellement) toutes les structures de Poisson ; il s'agit de structures qui comportent des objets définis par Poisson, mais dans un cadre très général et très formalisé. Ce sont des objets mathématiques fondamentaux en physique mathématique, en particulier pour les problèmes de dynamique.

Kontsevitch flirte avec la géométrie apparemment « élémentaire ». Il étudie ainsi la variété abstraite obtenue en complexifiant l'ensemble des positions d'un polygone articulé. Il montre que ce sont des variétés miroirs, à l'image de celles que viennent de découvrir des physiciens théoriciens en liaison avec des géomètres algébriques. Pour les quadrilatères, on obtient un tore et des fonctions elliptiques, ce qui est classique depuis Darboux, mais à partir des pentagones, on trouve des surfaces dites K3, de Calabi-Yau [c'est André Weil qui a dénommé K3 ces surfaces ; il explique pourquoi dans l'un des commentaires de Weil (1979–1980), tome II, page 546] ; ces objets sont certes aussi beaux que le sommet du « K2 » himalayen, mais, pour le mathématicien, ils sont d'abord liés aux noms de trois grands mathématiciens : Kummer, Kähler et Kodaira.

Le K2.

c Les grandes écoles thématiques, les grands courants actuels

Pour ne pas paraître trop partial, nous nous abriterons essentiellement dans ce qui suit derrière le rapport de conjoncture de la section « mathématiques » du CNRS datant de 1996.

Quoi qu'en disent certains, et quels que soient ses défauts, le CNRS a joué un rôle essentiel en tant que complément des centres de recherche des universités, ne serait-ce qu'au nom de la diversité des structures. La théorie de l'évolution montre bien à quel point la diversité est importante pour le développement. Or, les universités françaises sont, actuellement, entièrement bâties sur le même modèle, les professeurs y font des carrières pratiquement analogues, les diplômes sont nationaux, etc. Nous allons, dans la section suivante, passer en revue les points forts de la recherche mathématique en France, avant de nous intéresser aux endroits où elle se déroule.

Contrairement aux autres disciplines, le CNRS n'a, en mathématiques, aucun laboratoire propre. Les chercheurs du CNRS, dans notre discipline, se trouvent dans différentes structures, essentiellement dans les universités, à l'exception de centres de recherche particuliers comme ceux des Écoles normales supérieures (et de leurs diverses implantations), de l'École polytechnique, de l'INRIA, de l'IHES ou de l'IHP.

Les critiques contre le CNRS viennent de ce que ses chercheurs sont des chercheurs à vie depuis les années 1980, et donc sans aucune obligation d'enseignement. Et ce, même si la productivité du chercheur chute. Cette critique vaut plus encore pour les mathématiques, où l'âge ne pardonne que rarement ; au contraire, dans la plupart des autres disciplines scientifiques du CNRS, nombreux sont les laboratoires où l'on peut encore être fondamentalement utile à la recherche de pointe, dans des travaux qui ne sont plus à cent pour cent créateurs, intellectuels. Il faut pourtant noter ceci : le CNRS, jusqu'en 1975, n'offrit aux mathématiciens que des postes leur permettant de préparer leurs thèses, en tant qu'attachés de recherche. Il n'y eut aucun poste de directeur de recherche en mathématiques avant cette date. Il fallait donc quitter le CNRS pour se retrouver à un niveau supérieur à celui de maître de recherche, et entrer dans la carrière proprement universitaire. Beaucoup de postes à pourvoir s'ouvraient alors dans les universités, en pleine période d'expansion. Aujourd'hui, il serait bon que les passerelles entre le CNRS et les universités soient rendues plus faciles. En tout état de cause, en France où toutes les carrières universitaires sont également structurées, l'existence d'un organisme de nature différente, comme le CNRS, nous semble justifiée, encore une fois, au nom de la théorie de l'évolution : la diversité est nécessaire à la survie !

Algèbre et théorie des nombres

L'algèbre et la théorie des nombres appartiennent aux domaines traditionnels des mathématiques. Elles ont, depuis un siècle, noué des relations fécondes avec d'autres branches, comme la géométrie ou l'analyse. La théorie des nombres a connu de très grands progrès ces dernières années, le plus spectaculaire étant la résolution en 1994 du problème énoncé par Fermat au XVIIe siècle. La solution découle de la preuve d'une conjecture récente de Taniyama-Shimura-Weil, portant sur des notions très compliquées à décrire, même pour des mathématiciens d'autres spécialités. Cette ultra-spécialisation devient (malheureusement ?) assez caractéristique des mathématiques actuelles. De nombreuses questions importantes restent cependant ouvertes. La compréhension des points rationnels des variétés algébriques définies sur un corps de nombres fait ainsi l'objet d'actives recherches qui s'organisent autour de la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer. D'une nature plus arithmétique, la conjecture d'Artin sur les fonctions L des corps de nombres résiste encore et toujours. Signalons aussi le problème inverse de Galois (on conjecture que tout groupe fini est le groupe de Galois d'un corps de nombres sur $\mathbb{Q}$), qui est à la croisée de la théorie des nombres, de la géométrie algébrique et de la théorie des groupes.

De Fermat, la lignée des spécialistes en la matière passe par Hermite, Hadamard, puis Weil, Serre et surtout Grothendieck, dans la mesure où la théorie des nombres est liée fortement à la géométrie algébrique dès que l'on sait manier cette discipline sur des corps finis, et pas seulement dans le cadre classique des nombres complexes. Mentionnons aussi Deligne. Les élèves et épigones de Grothendieck sont trop nombreux en France pour être cités sans danger d'omission, mais l'un d'eux, Lafforgue, est un récent médaillé Field.

Dans cette branche, les invités français aux ICM ont été : Weil, 1950, Néron, 1954 et 1966, Raynaud et Yves Meyer, 1970, Jacquet, 1974, Coates, 1978, Soulé, Fontaine et Waldspurger, 1982, Clozel, Colliot-Thélène et Gabriel, 1986, Gillet et Laumon, 1990, Perrin-Riou, Brion, Waldspurger et Mestre, 1994, Laurent Lafforgue, Colmez et Gramain, 1998, Cohen, Fontaine et Ullmo, 2002.

L'interaction entre les méthodes arithmétiques, géométriques ou algorithmiques est forte. La théorie des nombres est une discipline très bien représentée en France, l'école française est de premier niveau sur le plan international. Passons maintenant en revue certains domaines plus précis de l'algèbre.

Les questions actuellement les plus vivantes et les plus stimulantes de la théorie des groupes finis et algébriques sont celles touchant à la théorie des groupes et de leurs représentations, qui relient algèbre et analyse. Un certain nombre de conjectures, énoncées dans les dix dernières années, prédisent des liens profonds entre combinatoire, groupes, tresses, géométrie algébrique, topologie, et sont corroborées par de nombreux résultats numériques. Voir les travaux (présentés aux ICM) de Dieudonné, 1954, Bruhat, Cartier et Tits, 1970, Tits et Duflo, 1974, Dixmier, 1978, Broué, 1986, Gromov, 1982, Vignéras, Harris et Delorme, 2002.

Plusieurs problèmes portant sur les actions des groupes algébriques réductifs restent ouverts, comme la description des actions sur un espace affine (avec des applications à des questions naturelles en géométrie algébrique) ou celle des propriétés globales des quotients d'ouverts de variétés algébriques projectives construits par la théorie des invariants.

Des questions classiques comme le calcul des multiplicités dans les produits tensoriels de représentations ont été éclairées d'un jour nouveau avec l'introduction des bases cristallines et les travaux sur le modèle des chemins ; ont été obtenues de nouvelles formules purement combinatoires qui expriment les multiplicités comme sommes d'entiers positifs. Des progrès sur la décomposition des puissances symétriques ont aussi été accomplis récemment, mais cette question reste encore largement travaillée.

La détermination des caractères irréductibles des groupes réductifs en caractéristique positive, objet d'une conjecture de Lusztig, a été obtenue il y a peu grâce à des ponts construits avec les groupes quantiques en une racine de l'unité et les algèbres de Kac-Moody ; il est remarquable qu'un de ces ponts ait été établi à partir d'idées de physique théorique.

Des objets de la géométrie convexe, polytopes, fonctions de partition, apparaissent naturellement dans nombre de problèmes issus de la théorie des groupes réductifs ; ces objets jouent aussi un rôle dans des questions d'actualité en géométrie symplectique.

Géométrie et topologie algébrique

La géométrie s'est développée en plusieurs branches (différentielle, algébrique, intégrale...) qui ont chacune leurs problématiques et leurs techniques. Certaines sont présentées dans cette section, d'autres plus loin (ce choix est certainement arbitraire). D'autres aspects auraient mérité d'avoir leur place ici, en particulier les nouvelles géométries « arithmétiques » (p-adiques), où l'école française est de niveau exceptionnel. La topologie a elle aussi éclaté en plusieurs centres d'intérêt dont certains, moins algébriques, seront évoqués.

La géométrie algébrique complexe est reine en France depuis le trio Weil-Serre-Grothendieck ; le flambeau s'est ensuite transmis. En voici quelques relais représentés aux ICM : Serre, 1954, Chevalley, Grothendieck et Samuel, 1958, Serre toujours, 1962, Douady, 1966, Giraud, Grothendieck et Deligne, 1970, A'Campo, 1974, Beauville, 1986, Voisin, 1994, Esnault et Schechtman, 2002. La géométrie algébrique complexe a été très bousculée récemment par le dialogue avec la physique mathématique, en particulier la théorie des champs : citons par exemple la découverte de la symétrie miroir, qui est un phénomène de dualité entre des familles de variétés projectives d'un type particulier, dit de Calabi-Yau (déjà mentionné). Des conjectures décrivent les relations très précises entre une variété et son « miroir », permettant notamment l'énumération des courbes rationnelles sur la variété. Citons aussi les « fonctions thêta non abéliennes » sur l'espace des modules des fibrés principaux sur les courbes, les invariants de Donaldson et plus récemment de Seiberg-Witten, sur les surfaces algébriques, et bien d'autres. Beaucoup de ces théories ont maintenant un statut mathématique, mais pas toutes : l'intuition de la théorie des champs, moteur commun de toutes ces découvertes, échappe actuellement à la plupart des mathématiciens. Rendre cette théorie rigoureuse est un objectif à long terme, mais il est peut-être possible de développer une intuition mathématique parallèle.

D'autres domaines plus classiques restent très attirants. La théorie de Mori cherche à décrire la structure fine des variétés algébriques. Elle est maintenant bien comprise en dimension inférieure ou égale à trois, beaucoup moins en dimension plus grande. Les méthodes utilisées sont très algébriques ; le cas des variétés complexes non algébriques est, lui, très mal compris.

Citons aussi la cohomologie de l'espace des modules des courbes, la difficulté de caractériser les jacobiennes de courbes parmi les variétés abéliennes (problème de Schottky), la recherche de critères simples pour décider si une famille d'hypersurfaces sur une variété peut être découpée par des hyperplans dans un plongement convenable (conjecture de Fujita), la théorie des cycles algébriques (quel type de sous-variétés contient une variété donnée ?)...

La géométrie algébrique réelle étudie les systèmes d'égalités et d'inégalités polynomiales dans le domaine réel. Son émergence en tant que sous-discipline remonte à une quinzaine d'années ; elle attire à la fois des topologues, des algébristes, des géomètres, des théoriciens des modèles, tout en étant à la source de nombreuses applications. Les questions essentielles s'articulent autour de grands problèmes historiques : topologie des ensembles algébriques réels (16e problème de Hilbert), algèbre réelle et sommes de carrés (17e problème de Hilbert), rapport entre fonctions analytiques et fonctions algébriques, ensembles semi-algébriques et généralisations, effectivité et algorithmique dans la continuation du théorème de Sturm. La France a une bonne école de géométrie algébrique réelle ; en témoigne le livre qui fait référence à ce sujet : Bochnak, Costes, Roy (1987).

Les théories de modélisation des espaces topologiques par des objets algébriques se sont fortement développées. Après la connaissance approfondie des modèles rationnels à la suite de Quillen et de Sullivan, plusieurs théories rendant compte de la partie de torsion ont vu le jour. Des modèles algébriques simpliciaux plus fins permettent de prendre en compte les opérations de Steenrod.

La théorie de l'homotopie est essentiellement née avec l'introduction par Poincaré du groupe fondamental d'un espace. Son problème central est la classification, à déformation continue près, des applications continues entre espaces. Diverses questions motivent ces recherches, entre autres la classification des espaces de petite dimension, et la théorie des variétés *via* la construction de Thom-Pontryagin. Il y a eu durant les quinze dernières années des avancées considérables dans le domaine de l'homotopie équivariante, c'est-à-dire en présence d'actions de groupes. Cela a débouché sur l'étude des actions de groupes sur les variétés. Des conjectures majeures ont été résolues. Par ailleurs, la théorie de l'homotopie entretient des liens étroits avec la K-théorie algébrique et l'algèbre homologique. Un autre développement spectaculaire en cours tient dans l'introduction des techniques d'homotopie stable dans un domaine central de la géométrie algébrique moderne, la théorie des schémas.

La théorie de l'homotopie a déjà connu plusieurs révolutions et offre toujours de vastes champs à explorer. L'école française, avec Serre et Thom, en a initié une très large part ; très bien placée sur la scène internationale, elle est toutefois numériquement faible. Notons, parmi les invités des ICM : Thom, 1958, Poenaru, 1962, Cerf et Karoubi, 1966, Siebenmann, 1970, Bismut, 1988, Vergne, 1982, Kontsevitch et Viterbo, 1994, Bismut, 1990.

À la suite d'Élie Cartan, la géométrie riemannienne demeure elle aussi bien représentée et reste vivante, avec Gromov comme phare ; aux ICM : Lichnerowicz, 1954, Berger, 1962, Lelong-Ferrand, 1974, Gromov, bien sûr, 1978, Gromov, Connes, Bismut et Colin de Verdière, 1986, Ghys, 1990, Gallot et Labourie, 1998, Seidel et Giroux en 2002.

À la charnière de l'algèbre et de l'analyse se situe l'analyse complexe d'une ou plusieurs variables, où la France a joué un rôle initiateur très fort, en particulier lorsque Henri Cartan et ses successeurs ont introduit la théorie des faisceaux de Leray. Voici les noms conviés aux ICM : Cartan, 1950, Skoda, 1978, Teissier, 1982, Douady, 1986, Demailly, 1994.

L'analyse réelle, la théorie de la mesure (à la suite de Lebesgue), l'analyse fonctionnelle (c'est Paul Lévy qui lui donne ce nom en 1924) et les équations aux dérivées partielles (EDP, linéaires et non linéaires) sont quelquefois présentées comme l'étude des inégalités et des espaces de fonctions. Ce travail de longue haleine a permis des progrès très remarquables dans la résolution des équations aux dérivées partielles. C'est l'aboutissement de ces travaux qui sert de fil directeur à la présentation qui suit. Tout ceci constitue un vaste ensemble très actif qui s'est développé considérablement dans la période récente. Ce domaine présente de multiples interactions avec d'autres champs des mathématiques et il est très utilisé dans la modélisation de phénomènes relevant d'autres disciplines comme la physique, la chimie, la biologie, l'économie, l'imagerie, etc. Les bases théoriques sont continuellement enrichies par l'apport de techniques venant de l'analyse, de la géométrie, voire de l'algèbre. Des connexions nouvelles se développent aussi avec la géométrie différentielle, les systèmes dynamiques et les probabilités. D'autre part, les domaines d'application ne cessent de s'élargir, allant des problèmes de la chimie comme ceux de la combustion ou de la cinétique des réactions à certains aspects de la gestion financière.

Les noms d'analyse fonctionnelle représentés aux ICM : Schwartz et Mandelbrot, 1950, Pauc, 1954, Kahane, Choquet et Malliavin, 1962, Dixmier et Malgrange, 1966, Jacques-Louis Lions, Martineau, Pham, Tougeron et Varopoulos, 1970, Maurey et Connes, 1974, Connes, Dixmier et Foias, 1978, Pisier, 1982, Bourgain, 1986, Talagrand, Sibony, Varopoulos et Skandalis, 1990, Pisier, 1998, Biane et Vincent Lafforgue, 2002.

La France a une tradition très forte dans le domaine des EDP et plusieurs séminaires célèbres servent de référence en constituant un fond technique mondialement utilisé. Citons les noms clefs, avant guerre, d'Hadamard et Leray ; puis celui de Schwartz, relayé par ses deux principaux élèves du début : Malgrange et Jacques-Louis Lions. Puis l'explosion actuelle. La tendance du milieu est plutôt à la diversification et rares sont les champs d'étude qui ne sont pas abordés par un laboratoire français. Des difficultés pourraient toutefois apparaître si l'on ne prend garde à maintenir un potentiel suffisant en chercheurs et un développement adéquat des moyens de calcul.

Voici nos très nombreux invités aux ICM en la matière : Bureau, 1954, Jacques-Louis Lions, 1958, Leray, 1962, Bony, Boutet de Monvel, Grisvard, Trèves, Jacques-Louis Lions, 1970, Baouendi, Brézis, 1974, Sjöstrand, 1978, Yves Meyer et Bony, 1982, Coron, Lebeau, Pierre-Louis Lions, Shapira et Tartar, 1990, Bourgain, Pierre-Louis Lions, Chemin, Perthame, 1994, Béthuel et Hélein, 1998, Bahouri et Rivière, 2002.

Probabilités et statistiques constituent les mathématiques du hasard. Ce point de vue a enrichi les mathématiques de nouvelles intuitions. Le cœur des probabilités est l'étude des objets mathématiques construits pour modéliser les comportements avec des données inconnues ou imprévisibles. Cette branche est très sophistiquée, et l'école française est prestigieuse en ce qui concerne l'analyse des objets classiques. Elle est aussi très présente sur certains champs nouveaux : super-processus, probabilités quantiques, systèmes infinis de particules. On peut cependant regretter que l'étude mathématique de sujets apparus récemment en physique statistique, tels que la percolation ou l'étude des milieux aléatoires, soit encore trop peu développée en France. La liste des invités aux ICM demeure néanmoins éloquente : Fortet, 1954, Dellacherie, 1970, Faraut et Neveu, 1974, Malliavin, 1982, Le Cam et Yor, 1990, Talagrand et Le Gall, 1998, Ben Arous et Bertoin, 2002.

Cette explosion récente aurait pu se produire beaucoup plus tôt ; on a vu que Paul Lévy resta longtemps ignoré, car trop en avance et écrivain trop dense. Il fallut donc attendre l'après-guerre, avec la venue en France du Belge Jacques Neveu, relayé ensuite par Paul-André Meyer puis Malliavin. Aujourd'hui, le flambeau est en de nombreuses mains ; citons Yor, Talagrand et Werner. Notre école enregistre de gros progrès dans différents domaines très nécessaires en physique théorique, comme la difficile étude du comportement du mouvement brownien en plan sans intersection ou la percolation, que l'on rencontre dans la physique de la matière condensée, mais aussi dans l'étude des risques de pollution nucléaire.

Par nature, les probabilités sont une science appliquée, disons plutôt applicable. Soulignons la place des mathématiques financières, en développement rapide ces dernières années : des modèles très élaborés sont appliqués quotidiennement, les questions posées sont à la fois techniques et fondamentales. Grâce aux compétences accumulées et à l'activité de quelques mathématiciens, c'est un domaine où la France est active et qui devient une vraie source de débouchés pour les étudiants en mathématiques. Un autre domaine de probabilités appliquées en pleine évolution est constituée par le traitement d'images et l'algorithmique aléatoire ; plusieurs équipes de grande valeur s'y sont investies.

La situation en statistiques est parallèle, quoique moins favorable. Les statisticiens partent du point de vue de l'utilisateur et utilisent des méthodes probabilistes. Ils cherchent à estimer les paramètres des modèles et à faire des prévisions à partir des observations. Là encore, la théorie est bien représentée en France. C'est un domaine en pleine évolution où les mathématiques prennent de plus en plus d'importance, comme les techniques d'ondelettes, les grandes déviations, la géométrie. Les statistiques sont une science appliquée et d'un usage constant dans l'économie, la médecine, l'industrie et toutes les autres disciplines scientifiques. Malheureusement, les théoriciens sont assez peu présents sur ce terrain et, mis à part quelques groupes de statisticiens appliqués, il reste un gros travail à accomplir pour les rapprocher des utilisateurs.

Analyse de quelques thèmes transversaux

Il s'agit de thèmes souvent nouveaux qui ont pour caractère commun de motiver des chercheurs d'horizons différents. Ils se caractérisent aussi par le besoin de fonder les théories adéquates.

Groupes quantiques

Il s'agit d'un domaine apparu il y a une dizaine d'années et qui a développé rapidement des interactions spectaculaires avec de nombreux autres domaines des mathématiques et de la physique théorique : on peut citer la topologie de basse dimension (invariants « quantiques » des entrelacs et des variétés de dimension 3), la théorie des représentations des groupes algébriques en caractéristique non nulle (conjectures de Lusztig), les bases cristallines et leurs applications combinatoires, les q-fonctions spéciales, les théories des champs conformes, les sous-facteurs, etc. Plusieurs points de vue complémentaires se sont développés à propos de la notion même de groupe quantique : quantifications d'algèbres enveloppantes ou d'algèbres de fonctions sur des groupes de Lie, déformations, C*-algèbres de Hopf, etc. Les questions motivant les recherches sont très variées, selon le point de vue adopté et les applications envisagées. C'est un domaine où il y a encore beaucoup à défricher et qu'il faut laisser se développer en recrutant des gens de valeur, même s'il est d'ores et déjà bien représenté en France.

Fonctions automorphes

L'étude des fonctions automorphes et de leurs liens avec l'arithmétique occupe une place centrale. Selon certains (qui reprennent un mot de Godement), c'est le « jardin des délices » ou « l'opium des mathématiciens ». Ce domaine est tiré en avant depuis trente ans par un ensemble imposant de conjectures formulées par le mathématicien canadien Robert Langlands. Ce programme propose une correspondance entre deux types d'objets de natures apparemment très différentes : les représentations du groupe de Galois d'un corps, qui relèvent de la théorie des nombres, et les fonctions automorphes, qui relèvent de l'analyse. La réalisation de ce programme représente un travail immense qui met en jeu l'analyse sur les groupes (formule des traces), l'étude des représentations des groupes de Lie réels et p-adiques (correspondance de Howe), la géométrie algébrique avec l'étude de certaines variétés algébriques associées à des groupes (variétés de Shimura, variétés de Drinfeld). Ce dernier point a récemment progressé. Signalons que s'inscrivent dans ce domaine les résultats de Wiles et de Taylor sur les congruences entre formes modulaires et leurs rapports avec les représentations du groupe de Galois, résultats qui jouent un rôle essentiel dans la démonstration du théorème de Fermat. La correspondance de Langlands a un analogue géométrique qui ne fait pas intervenir de théorie des nombres, et pour lequel Beilinson et Drinfeld ont introduit il y a deux ans une approche nouvelle très prometteuse. Le domaine des fonctions automorphes a d'excellents représentants en France et fait l'objet d'une grande activité internationale. Le nom clef, on l'a vu plus haut, est Lafforgue, 1998 et 2002, date de ses deux interventions aux ICM.

La théorie des systèmes dynamiques est l'étude qualitative des équations différentielles. Le père fondateur de la théorie est Henri Poincaré, mais la place éminente que la France occupe dans le domaine est plus due à un concours de circonstances qu'à l'existence d'une véritable école. La structure, ou plutôt l'absence de structure des systèmes dynamiques dans notre pays reflète cette génération spontanée. Le principal attrait du sujet est qu'il fait appel à des techniques issues de nombreux domaines et qu'il interagit avec beaucoup de branches des mathématiques. Cet intérêt déborde d'ailleurs largement du cadre strict des mathématiques. Forte est la relation avec les sciences où le temps est un paramètre essentiel, comme la mécanique (en particulier la mécanique céleste, à l'origine des travaux de Poincaré), l'hydrodynamique, les systèmes éloignés de l'équilibre (turbulences, structures spatio-temporelles) ou la dynamique des populations. La France est en pointe sur pratiquement tous ces sujets ; une faiblesse des systèmes dynamiques français réside toutefois dans le manque de développement des interactions avec la physique mathématique et l'industrie. En URSS, des structures et des institutions communes faisaient coopérer mathématiciens et physiciens. Voici les Français représentés aux ICM en théorie des systèmes dynamiques : Herman, 1978, Ruelle, 1982, Kupka, 1986, Ecalle et Yoccoz, 1990, Yoccoz et Ledrappier, 1994, Herman, 1998, Bonatti et Chenciner, 2002.

Analyse numérique, théorie du contrôle : les plus grandes avancées réalisées ces dernières années en analyse numérique s'inscrivent dans le domaine des équations aux dérivées partielles. Elles ont permis une compréhension correcte non seulement d'équations modèles théoriques mais aussi des problèmes de base de la mécanique, se traduisant par la construction d'algorithmes bien appropriés à leur discrétisation. Toutes les grandes méthodes de discrétisation ont été analysées en France dès leur apparition : méthodes de différences finies, en particulier pour les schémas en temps, méthodes d'éléments finis, méthodes spectrales et d'éléments spectraux, méthodes particulières de volumes finis, d'ondelettes, techniques de décomposition de domaines et de synthèse modale en vue du calcul parallèle. La réécriture des algorithmes en vue de leur traitement par des machines parallèles est un enjeu majeur qui conditionne l'accomplissement des gros calculs dont l'industrie a besoin. Les contributions françaises à ces questions se caractérisent le plus souvent par leur grande rigueur mathématique. Voici les invités aux ICM : Temam, 1970, Jacques-Louis Lions, 1974, Bensoussan, 1974, Ekeland et Raviart, 1978, Pierre-Louis Lions et Glowinski, 1982, Meyer, 1990, Ciarlet, 1994, Cohen, 2002.

Géométrie, analyse et physique

La géométrie différentielle a été dès son origine profondément liée à la physique et les allers-retours conceptuels sont nombreux et féconds. Les noms d'objets géométriques usuels le montrent bien : métriques d'Einstein, opérateurs de Dirac, spineurs, etc. Outre la symétrie miroir déjà évoquée dans un contexte algébrique, de nombreux progrès, centrés sur la géométrie, ont eu lieu. Les invariants de Seiberg et Witten, utilisant une équation de Dirac particulière, ont permis des avancées spectaculaires dans la compréhension de la topologie de dimension 4 et en topologie symplectique, amplifiant des résultats de la théorie de Donaldson qui, elle, s'appuyait sur les théories de jauge non abéliennes. Ont été invités aux ICM : Michel, 1966, Ruelle, Choquet-Bruhat et Lichnerowicz, 1970, Duvaut, Guiraud, Roseau, 1970, Combes, 1974, Gawedzki, 1986, Belissard, Pardoux, Robert et Quadrat, 1994, Collet et Peskin, 1998, Nekrasov, El Karoui et Brenier, 2002.

Parmi les sujets où les idées des physiciens ont permis de progresser notablement, on peut également citer les méthodes variationnelles d'EDP en analyse globale, en particulier pour les relations entre courbure et topologie, la topologie symplectique, dont beaucoup de propriétés sont encore mystérieuses, la géométrie kählérienne et ses liens avec la théorie quantique des champs, la géométrie différentielle non commutative et les interprétations physiques qu'en propose Alain Connes, l'usage des spineurs en géométrie et la supersymétrie, la géométrie sous-riemannienne et son usage en théorie du contrôle, les approches géométriques de la théorie des nombres, la géométrie à courbure négative et ses liens avec la théorie ergodique et le chaos quantique, etc. Devant ce foisonnement un peu étourdissant, le fait que la France héberge un grand nombre de mathématiciens de talent, travaillant à quelques heures les uns des autres, est un atout considérable qui doit lui permettre de rester à la pointe de la recherche sur des points fondamentaux de la compréhension du monde physique.

Logique, combinatoire, algorithmique (en liaison avec l'algèbre) constituent des domaines plus récents ; la place de la France est en train de changer, on le constate au travers des invités aux ICM : Schützenberger, 1970, Girard et Foata, 1982, Lanford, 1986, Louveau, 1994, Lascoux, 1998, Bouscaren, Flajolet, Reed et Lascar, 2002.

Modélisation

La modélisation est une activité relativement récente. Il s'agit de prévoir ce qui va se passer par des essais « fictifs ». Les souffleries pour avions s'y employaient autrefois. BMW a modélisé ses boîtes de vitesse, devenues relativement trop bruyantes par rapport à ses progrès d'insonorisation, par ordinateur. On peut procéder à partir d'une équation (EDO, EDP), la modélisation consistant à intégrer ces équations sur ordinateurs (par différentes techniques, de discrétisation notamment). Ou bien il faut trouver un modèle approché, le meilleur possible, qui traduise bien le système et soit calculable en « temps réel ». En France, on s'est demandé si l'on pouvait ou non passer à la modélisation pour les essais atomiques. Mais, selon certaines informations, l'URSS a fait exploser une bombe atomique dont la puissance réelle a été de six fois supérieure à la puissance modélisée obtenue auparavant...

Les modèles mathématiques, discrets ou continus, déterministes ou stochastiques, prennent en compte des phénomènes non linéaires de plus en plus complexes, dans des géométries multi-dimensionnelles. Ils s'appliquent à de nouveaux domaines scientifiques (environnement, réseaux de neurones, etc.), à des problèmes industriels représentant des enjeux économiques, voire stratégiques, majeurs. La puissance des ordinateurs actuels, notamment parallèles, permet non seulement la simulation numérique de phénomènes connus, mais aussi de véritables « expérimentations numériques » donnant lieu en retour à une évaluation des hiérarchies de modèles en confrontation à la situation expérimentale réelle. La validation est une phase cruciale et demande au préalable une étude théorique incontournable des phénomènes critiques qui peuvent se produire dans les modèles. À la base, on trouve la théorie des bifurcations et celle des systèmes dynamiques. Toutefois, les problèmes posés par les physiciens, chimistes, biologistes... sont le plus souvent extrêmement complexes et nécessitent le recours à de nombreuses branches des mathématiques : équations aux dérivées partielles, méthodes asymptotiques et homogénéisation, singularités, méthodes géométriques, frontières libres, groupes de Lie et leurs représentations, probabilités, etc. La démarche du mathématicien modélisateur couvre ainsi tout le spectre des mathématiques, de l'analyse du système jusqu'au code de calcul.

Voici une liste, non limitative, des domaines où la modélisation est en plein essor :

Mécanique des fluides

Les équations de la mécanique des fluides font depuis longtemps l'objet de simulations numériques : actuellement, la création d'un nouvel avion repose majoritairement sur des expérimentations numériques « en taille réelle ». Bien qu'étudiées depuis longtemps, les instabilités hydrodynamiques, transition vers la turbulence et le chaos, ou ondes de surface par exemple, sont encore largement incomprises. De grands efforts sont faits sur les fluides non newtoniens, le vaste domaine de la combustion, à l'interface entre l'hydrodynamique et la chimie, le couplage fluide-structure. Leray lui-même a fait de la modélisation en la matière.

Nouveaux matériaux

La modélisation ne se limite plus aux plaques, elle s'applique aussi aux nouveaux matériaux parmi lesquels ceux dits « intelligents » (à mémoire) et à l'optimisation de formes sous contraintes technologiques (conception assistée par ordinateur).

Électromagnétisme

L'évolution récente de la technique de détection par radar débouche sur de nouveaux problèmes liés à la furtivité, soit par des méthodes actives de type antennes, soit par l'utilisation de nouveaux matériaux. Ces problèmes requièrent la modélisation et la simulation numérique précise des ondes électromagnétiques.

Interaction laser-matière

La construction de lasers de haute puissance laisse entrevoir la possibilité de l'étude mathématique d'un domaine de la physique inexploré jusqu'alors.

Environnement

Cette rubrique regroupe des thèmes en pleine évolution, en climatologie, météorologie, géologie, glaciologie, systèmes écologiques, etc. La mécanique des fluides géophysiques dans des milieux souvent aléatoires fait intervenir des échelles d'espace et de temps considérables. Il est donc indispensable d'élaborer des modèles simplifiés globaux, par exemple pour les interactions océan-atmosphère ou la circulation de l'air en milieu urbain. Ces techniques, à cheval sur les probabilités et le calcul scientifique, sont encore trop peu développées en France.

Mathématiques du vivant

Il s'agit là d'une branche des mathématiques appliquées, nouvelle en France, sur laquelle plusieurs groupes commencent à travailler. Citons parmi les recherches en cours les problèmes de propagation d'épidémies, le séquençage de génômes, les écoulements sanguins, la morphologie du cœur. Les collaborations entre biologistes, médecins et mathématiciens devraient être, du reste, davantage encouragées.

Réseaux de neurones

Les problèmes posés par les réseaux de neurones et la vision artificielle sont étudiés par des équipes au double profil mathématique et informatique, avec de multiples interactions.

Mathématiques et économie

Parmi les nombreuses interventions des mathématiques en économie, l'exemple des mathématiques financières montre bien l'explosion des besoins. En effet, avec l'ouverture de marchés organisés en France, à la suite des États-Unis et de la Grande-Bretagne, s'est développée une activité financière dont les enjeux sont considérables et qui rapproche la banque de l'assurance. Il y a dans ce domaine un grand besoin de modèles, d'ingénieurs mathématiciens capables de faire tourner des calculs en temps réel, de nombreuses questions de recherche et développement en suspens.

L'objet d'étude lui-même est abstrait ; l'exemple le plus simple en est la couverture des produits dérivés. Il n'est pas étonnant que les modèles soient assez sophistiqués : ils font intervenir, le plus souvent simultanément, les problèmes inverses en EDP, les équations différentielles stochastiques, les simulations statistiques et renvoient à de nombreuses questions théoriques. Les banques et les assurances devraient jouer leur rôle de stimulateurs industriels en finançant une recherche appliquée de qualité qui saurait utiliser la richesse du niveau de formation mathématique en France.

Histoire des mathématiques

L'histoire des mathématiques, comme la didactique, ont certainement un caractère transversal, car elles touchent les mathématiciens de toute obédience. L'histoire mathématique est pratiquée en France par une centaine de personnes et, dans le monde, par un millier environ. Le sujet est en pleine expansion au niveau de la recherche avec l'apparition de nouvelles collections, de livres, de revues, de nombreuses conférences et associations savantes et avec la création de plusieurs instituts, en particulier un Institut Max-Planck à Berlin. Bourbaki (1969) a, en France, été un pionnier. Les recherches sur les mathématiques non occidentales, soit pré-grecques, soit dans des traditions largement indépendantes comme l'Asie, ont connu un important développement. Des découvertes archéologiques et philologiques importantes ont permis par exemple de comprendre en détail la naissance du nombre écrit abstrait. De grands projets éditoriaux, faisant intervenir les nouvelles technologies, concernent les œuvres de mathématiciens et physiciens comme Leibniz, les membres de la famille Bernoulli, d'Alembert, Condorcet, Poincaré, Jacobi, Weyl ou Einstein. L'histoire des mathématiques aborde aussi des questions essentielles comme les rapports entre mathématiciens et société. La France occupe une bonne place dans les résultats obtenus, en particulier grâce à des travaux sur l'Asie et ses relations avec les mathématiques européennes, les mathématiques en Méditerranée, les mathématiques arabes, l'histoire des statistiques, les mathématiques dans les écoles d'ingénieurs, etc. Le CNRS y joue un rôle important. Les sections Histoire et Didactique des ICM ne comportent que peu de noms, de deux à quatre selon les années. Y ont été invités : Weil, 1978, Thom, 1982, Kahane, 1986, Artigue et Chemla, 1998, Dorier, 2002.

d La situation française et le contexte international

La situation des mathématiques françaises est globalement très bonne. Elle est même excellente au niveau scientifique ; en effet, rares sont les secteurs des mathématiques non représentés en France, et dans certains d'entre eux, notre pays a une bonne avance. Cela est dû en partie à la place importante que les mathématiques occupent dans l'enseignement français. Au niveau matériel, la situation est à peu près aussi bonne. L'existence du CNRS est un atout d'une importance incomparable pour le maintien au plus haut niveau de la recherche mathématique. Il est primordial de préserver ces deux atouts, le CNRS et la qualité de l'enseignement, et il convient de ne se relâcher ni sur l'un ni sur l'autre.

Il est également important de s'intéresser à la situation dans les autres pays et de défendre la science chez nos partenaires. Un événement majeur est l'effondrement survenu dans les pays de l'Est et notamment en Russie. Cet énorme bassin de connaissances mathématiques et de savoir-faire s'est ouvert largement aux contacts et, dans le même temps, a été déstabilisé par un arrêt brutal des moyens matériels mis à disposition. Il en a résulté un grand remue-ménage des idées et des hommes dans presque tous les champs des mathématiques. La France en a largement bénéficié grâce à d'excellentes initiatives comme les postes d'accueil CNRS ou les postes PAST. Une des conséquences de ces bouleversements est que, désormais, tous les mathématiciens travaillent dans le même univers. Il n'existe plus cet « au-delà » des mathématiques où des théories inconnues étaient en mouvement, même si certains travaux méprisés à tort ailleurs pouvaient y trouver un écho favorable (le défrichage du travail de De Branges par l'école de Leningrad en est un bon exemple).

Il semble qu'aux États-Unis la situation soit moins bonne, avec moins d'emplois, moins de moyens et un fléchissement perceptible dans certains domaines. Il est indéniable que le nombre de colloques importants a diminué. Il faut espérer que cette période défavorable ne durera pas et que nos collègues américains retrouveront rapidement de meilleures conditions de recherche.

En Europe, on assiste à une coopération renforcée entre pays. Il s'y déroule de plus en plus fréquemment des colloques importants, de sorte que les mathématiciens français rencontrent désormais leurs collègues allemands, britanniques, suisses, italiens ou autres ailleurs que dans une université américaine. Les centres de rencontre européens (Oberwolfach, CIRM à Marseille-Luminy) se sont imposés comme des lieux privilégiés pour organiser des colloques mathématiques et sont donc très recherchés. Des instituts accueillant un grand nombre de visiteurs ont été créés dans la plupart des pays du monde. Ceux qui sont situés en Europe (Institut Max-Planck à Bonn, Institut Isaac-Newton à Cambridge, ICTP à Trieste, Institut Mittag-Leffler en Suède, Institut Henri-Poincaré à Paris, Institut des hautes études scientifiques à Bures-sur-Yvette...) ont un grand rayonnement. L'augmentation des crédits européens pour la recherche joue aussi un rôle fondamental dans cette évolution. Cette situation très positive n'exclut pas quelques dysfonctionnements et des erreurs de répartition, auxquels il est urgent de remédier en instaurant des structures d'administration de la recherche mieux adaptées.

Dans les pays en développement, la situation n'a guère évolué. Parfois, elle s'est même dégradée, comme en Algérie. Il faut pouvoir accueillir des étudiants et des chercheurs de ces pays dans de bonnes conditions. Mais il faut aussi préserver les structures de formation qui y existent et multiplier les coopérations, telles celles mises en œuvre par le CIMPA. Dans le Sud-Est asiatique, certains pays atteignent un niveau de développement économique élevé, et l'émergence d'universités fortes est à prévoir. Il est important que les mathématiques y prennent toute leur place ; les mathématiciens français doivent s'y employer.

Toutefois, il convient de comprendre les raisons de cette situation et de ne pas se contenter des succès récemment obtenus sur la scène internationale. Les mathématiciens ont fait preuve, depuis quelques années, d'une grande ouverture, bénéfique à bien des égards. Les applications apportent beaucoup, et pas seulement au niveau financier. Mais un équilibre doit être maintenu, et il faut consolider au niveau théorique les avancées venues des applications. Il est remarquable que ce soit la collaboration ouverte entre des mathématiciens théoriciens très curieux et des modélisateurs soucieux de rigueur qui ait permis une avancée significative dans plusieurs domaines, comme la théorie des ondelettes. Cela démontre une nouvelle fois qu'il est essentiel de préserver l'unité des mathématiques. Les mathématiques françaises ne doivent pas perdre leur identité en se morcelant ; elles doivent garder une structure cohérente. Reste un point sombre pour l'avenir, mais que partagent d'autres pays et d'autres disciplines : la désaffection des jeunes pour les études en sciences « dures », qui se manifeste par une forte diminution des effectifs dans les universités et une moindre concurrence dans les grandes écoles. Les jeunes, même issus de grandes écoles, semblent plus attirés par les professions liées à l'économie. La réussite dans la recherche demande un investissement plus long et moins certain. Il n'en est pas ainsi, il est vrai, dans des pays en plein développement, comme la Chine.

IV *Les mathématiques françaises contemporaines : carrières et lieux*

a La carrière d’un chercheur en mathématiques aujourd’hui

Cette carrière commence après la baccalauréat, à l’université, où l’étudiant obtient en environ quatre années une maîtrise de mathématiques (le mot « maîtrise » varie selon les pays, on parle aussi de premier et de second cycle, et une réforme unifiante européenne est en cours). La recherche proprement dite s’amorce avec les études dites de troisième cycle (« graduées » ou « graduate », se terminant par exemple avec le PhD américain). Celles-ci durent en général trois ans, la première année étant consacrée à des cours (et aux examens correspondants) portant sur la recherche actuelle, en vue de la préparation d’une « thèse de troisième cycle ». À partir de ce cycle, il faut penser à se spécialiser ; spécialisation qui s’effectue généralement dans les disciplines bien représentées dans l’université où l’on a décidé d’étudier. Il faut pouvoir y trouver un « patron de thèse » dans la discipline désirée. Rares sont les universités qui possèdent de tels professeurs dans toutes les branches des mathématiques ; le chercheur potentiel peut donc avoir à changer d’université ou travailler dans l’une des disciplines représentées là où il se trouve sans l’avoir spécialement voulu. Après l’examen de la première année de troisième cycle, la préparation d’une thèse de troisième cycle demande en moyenne deux ans.

La France avait, jusqu’en 1970, un système particulier pour recruter ses chercheurs, précisément les professeurs d’université ; mauvais système à tout le moins, sauf avant la seconde guerre mondiale. Ce système pouvait en effet fonctionner correctement pour un petit nombre de chercheurs potentiels, comme c’était alors le cas. Il n’y avait qu’un diplôme, le doctorat d’État, mais de très haut niveau (le niveau que l’on demande aujourd’hui à l’habilitation). On devait parfois aller jusqu’à huit ans pour obtenir ce diplôme. Mais il n’y avait aucun palier intermédiaire. Avant-guerre, cette thèse d’État était préparée par des personnes qui étaient en même temps enseignants du secondaire. Donc des êtres assez exceptionnels. Mais ce système ne pouvait plus guère fonctionner efficacement, en tout cas pour les mathématiques, après 1945. Le CNRS offrit alors des bourses de recherche à des candidats prometteurs, le temps qu’ils finissent cette fameuse thèse. Mais le système, avant la création en 1970 de la thèse de troisième cycle, décourageait parfois les chercheurs et leurs directeurs de thèse, surtout si ceux-ci étaient exigeants. C’est l’une des raisons qui peuvent expliquer un phénomène peu connu, auquel aucun collègue assez jeune ne croit, à savoir que les grands noms tels que Weil, Serre, Chevalley, Leray, Dieudonné, et même Élie Cartan, n’eurent pratiquement aucun élève. Serre avouait ne pas avoir le courage de lancer quelqu’un dans la recherche pour, au bout de huit ans, le renvoyer enseigner au lycée s'il n'avait pas obtenu de résultats suffisamment probants. L'individualisme français a aussi joué. Le système allemand demandait quant à lui, dans un premier temps, un diplôme-banc d'essai. Le détenteur pouvait ensuite trouver un poste de « Privatdocent » et changeait d'université avant d'avoir suffisamment de travaux pour demander à soutenir une habilitation, de niveau comparable à notre ancienne thèse d'État. La notion de directeur de thèse était donc moins rigide. Aux États-Unis, comme dans d'autres pays, existait déjà le PhD, analogue à l'actuelle thèse de troisième cycle. Ensuite, selon la valeur de cette thèse, de niveau très variable selon les universités (souplesse bien américaine), le chercheur, armé d'autres travaux de référence, pouvait se porter candidat et espérer un poste dans une université, même si, là encore, il y avait en moyenne un abîme de niveau entre les *colleges of general education* et les universités de haut niveau.

Revenons à la situation actuelle. Le possesseur d'une thèse de troisième cycle peut alors obtenir, en théorie, un poste d'assistant ou de maître de conférences (il s'agit d'emplois salariés) dans une université qui offre des postes à pourvoir. Mais, selon les pays et les villes, il est de plus en plus difficile actuellement de trouver un tel poste. C'est un phénomène plus ou moins récent ; il en résulte que la plupart des grands pays, voire l'Union européenne au niveau de Bruxelles, ont mis sur pied un système de bourses, d'emplois temporaires, dits post-doctoraux. Dans l'après-guerre, il en allait tout autrement, car il fallait restructurer les universités, mais aussi les développer et en créer de plus en plus, en cette période de forte croissance. Or, depuis 2000, il n'y a plus véritablement de création de postes en grand nombre.

Quoi qu'il en soit de sa position, le chercheur, même maître de conférences, qui veut devenir professeur d'université doit préparer, puis soutenir, une habilitation (précisément, « habilitation à diriger des recherches »). Cette habilitation est soutenue devant un jury et demande, outre une thèse de troisième cycle, d'avoir à son actif suffisamment de travaux, de publications de qualité. Reste alors à trouver un poste libre dans une université. La facilité varie énormément selon les pays, mais aussi, évidemment, selon le niveau des recherches, des publications du candidat. Voir le dernier article de Martin-Deschamps, Le Tallec, Waldschmidt *et alii* (2002).

Mais la France offre une seconde filière, qui lui est particulière. Le système français, et ce depuis 1794, comprend tout un cursus parallèle (hormis pour la thèse) à celui des universités : celui dit des grandes écoles. En voici une présentation rapide, donc un peu schématique. Viennent en premier les

Écoles normales supérieures, à Paris, Lyon et Cachan. Initialement créées pour former des enseignants de tout niveau (mais pas des chercheurs), elles ont progressivement formé des chercheurs, des professeurs d'université, en prenant en charge toutes leurs études. Mais, c'est là le prix à payer, contrairement aux universités qui sont d'accès libre dès que l'on possède un baccalauréat, on n'entre dans ces écoles que par un concours extrêmement sélectif.

La tentative de faire respecter la parité hommes-femmes dans la recherche française s'est avérée avoir l'effet contraire à celui souhaité, tout au moins en mathématiques. Dès 1900, il existait pour les jeunes filles une École normale supérieure (située à Sèvres ; on parlait de « sévriennes » à propos de ses anciennes élèves) particulière. Il y eut aussi une agrégation féminine. Grâce à ce système, la France a été pendant très longtemps le pays du monde où il y avait le plus fort pourcentage de femmes professeurs d'université. Les jeunes filles étaient bien autorisées à se présenter au concours d'entrée à la rue d'Ulm, mais, même si elles étaient classées avec un rang qui leur permettait d'entrer, elles étaient *de facto* déclassées, et on leur offrait seulement une bourse de recherche en province (sous le fallacieux prétexte que l'entrée rue d'Ulm ne constituait, après tout, qu'une « bourse de recherche à Paris » !). En 1926, M^lle^ Jacotin (devenue M^me^ Dubreil par la suite) protesta auprès du ministre de l'Éducation nationale de l'époque, Émile Henriot, qui lui permit de devenir élève à la rue d'Ulm ; d'autres suivirent, dont Jacqueline Ferrand (1936). En lettres, il y eut entre autres Simone Weil (1928) et Jacqueline de Romilly (1933). Pendant et après la guerre, les jeunes filles furent de nouveau proscrites à Ulm ; on fusionna finalement les deux écoles, Ulm et Sèvres, avec un concours unique. Or, l'opération semble avoir aggravé la disparité hommes-femmes parmi les professeurs des universités !

Le cas de l'École polytechnique est assez différent ; créée initialement pour former les cadres tant militaires que techniques de l'État, notamment des ingénieurs, elle a produit ponctuellement quelques grands mathématiciens (Poincaré et Paul Lévy sont les plus célèbres) jusqu'en 1960 ; devenaient alors mathématiciens ceux qui le désiraient et obtenaient une permission spéciale (différents schémas étaient possibles). Nous avons vu que Laurent Schwartz, professeur dans cette école, y créa un centre de mathématiques pour rendre plus facile, plus attrayante cette formation de mathématiciens, et produire par là même plus de mathématiciens français de qualité.

La vie d'un chercheur, qu'il soit débutant ou directeur de thèse, ne se conjugue plus au singulier. Les résultats obtenus par un chercheur doivent être vérifiés. En mathématiques, discipline pratiquement unique sous ce rapport, la véracité

réside dans la démonstration écrite par le chercheur, l'auteur lui-même ; tandis que dans les disciplines scientifiques expérimentales, la preuve est faite dès qu'une expérience, surtout réitérée, confirme la théorie, les équations, etc.
En mathématiques, les résultats doivent être publiés. Les journaux de référence sont pratiquement tous internationaux ; on verra plus bas comment se fait l'acceptation d'un article.

Mais cette publication, vu le besoin de vérification, de relecture par un « referee » (un rapporteur), prend un certain temps, d'autant plus long que le journal est de haut niveau. Grave inconvénient ! Il y avait plusieurs façons de contourner un tel délai. La première et la plus ancienne était d'annoncer les résultats, le plus souvent sans démonstration détaillée pour que le tout tienne en trois pages, dans les *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris* (« CRAS »). Cette situation perdura jusqu'à tout récemment. Aujourd'hui, les CRAS publient vite, mais pas aussitôt, ayant établi un comité de lecture, certes assez « rapide » dans son fonctionnement. La seconde, plus récente, consiste à faire une prépublication, personnelle en quelque sorte, un tirage plus ou moins diffusé ;
ces textes sont écrits et ventilés sous la seule responsabilité de l'auteur. La troisième façon, c'est d'utiliser un site sur la Toile, soit en utilisant un site spécialisé, soit avec le sien propre.

De plus en plus de journaux mathématiques sont disponibles en ligne, ce qui offre un double intérêt. Le premier est que le texte est disponible dès acceptation par le journal ; il n'y a pas à attendre qu'il soit imprimé et aille dans les bibliothèques. Le chercheur n'a donc pas à avoir près de chez lui une bibliothèque abonnée à ce journal.

Trois dernières façons de faire connaître rapidement ses travaux et ceux des autres : les séminaires, les congrès, les activités spécialisées semestrielles ou trimestrielles, voire mensuelles. Ce sont des éléments constitutifs de la recherche actuelle, devenus indispensables vu l'augmentation du volume des recherches effectuées de par le monde.

Les séminaires : toute spécialité qui figure dans l'enseignement complet de troisième cycle d'une université fait presque toujours l'objet d'un séminaire (d'une fréquence hebdomadaire ou mensuelle, par exemple). Les exposés qui y sont faits sont de plusieurs natures : les chercheurs de « l'équipe » peuvent y présenter leurs travaux. Mais on peut aussi y trouver des exposés présentant les travaux importants faits plus ou moins récemment dans la spécialité, pour servir à la culture générale des participants ou à la mise à jour des connaissances de l'équipe. Ces exposés sont faits, soit par des membres de l'équipe, soit par des conférenciers invités (typiquement pour parler de leurs travaux récents). Les séminaires sont des rendez-vous indispensables. La France a pourtant été bien longue avant de les développer, on l'a vu plus haut. Cette absence, alors qu'ils fleurissaient en Allemagne, a certainement été un grand handicap historique, jusqu'en 1950.

La durée des congrès va d'une semaine à un mois. Si les congrès d'une semaine sont très spécialisés, ceux d'un mois sont plus généraux. Ces congrès couvrent, de façon variable, les frais de voyage et de séjour des participants invités. Le reste des frais peut être supporté par des organismes du pays d'origine du chercheur.

Les activités de moyenne durée sont plus récentes. L'exemple français type en est l'IHP (Institut Henri-Poincaré), qui organise chaque année (pour un à six mois) des activités sur un thème d'actualité, activités qui comprennent à la fois des cours magistraux (synthétiques) et des séminaires, et couvrent les frais des conférenciers généraux, mais aussi ceux des « post-docs » acceptés comme auditeurs.

b Les lieux de la recherche

Comme on l'aura remarqué, les mathématiciens des premiers temps ne sont pas des professionnels, ils font des mathématiques, soit en plus de leur métier, soit parce qu'ils possèdent une fortune suffisante. Il n'existe pas de profession de mathématicien. Nous pouvons faire remonter la professionnalisation à la fondation des Écoles polytechnique et normale supérieure. Encore que les Académies des sciences ont joué en partie ce rôle dans différents pays ; en France toutefois, il n'y eut guère que six à dix postes pour notre discipline, et surtout aucun salaire attaché à cette appartenance. Aujourd'hui, et c'est valable pour le monde entier, la recherche mathématique est faite, pour l'essentiel, par les professeurs des universités, à tout le moins lorsque celles-ci possèdent un département de mathématiques ; les professeurs d'université sont donc des enseignants-chercheurs.

Cependant, pour différentes raisons, lourdeur des tâches d'enseignement, tempéraments différents, augmentation des tâches administratives (correction des examens...), nécessité de voyager ou de prendre du recul, on a vu se créer des postes professionnels de recherche pure. Voici un bref survol de cette histoire. Elle commence en fait avec la fondation du Collège de France en 1530 par François Ier ; rappelons-en la motivation. Le monarque est informé par ses conseillers que la Sorbonne veut ignorer, pour des raisons religieuses, la culture grecque et ne professe que le latin. Il fonde donc des chaires pour obvier à cette lacune. Les professeurs y ont seulement des charges d'enseignement, extrêmement faibles, sans examens. Il n'y a pas d'étudiants, seulement des auditeurs. Certains postes dans de prestigieux collèges en Angleterre, comme à Oxford et Cambridge, ont un peu revêtu ce caractère. *A contrario*, Poncelet doit, sous la pression d'Arago, et avec un certain regret, interrompre ses recherches pour se consacrer à son poste de professeur de mécanique à l'école d'ingénieurs de Metz, sa ville natale.

La création de l'Institute of Advanced Studies de Princeton, aux États-Unis, représente une autre date clef dans l'évolution qui a conduit à l'actuelle situation. Diverses universités ont ensuite attaché à leurs départements de mathématiques des instituts de recherche mathématique qui peuvent jouer un rôle dans les échanges de chercheurs, l'accueil des jeunes ou l'organisation de rencontres ou de congrès ; un point essentiel aujourd'hui.

En France, Léon Motchane fonde en 1958 l'Institut des hautes études scientifiques à Bures-sur-Yvette, dans la proche banlieue de Paris. Il entend créer un Princeton européen. L'IHES a parfaitement tenu ce rôle. Il faut noter que, comme Princeton, l'IHES accueille, outre ses professseurs permanents, des chercheurs post-doctorants de haute qualité, triés sur le volet, et des universitaires en année sabbatique ou pour des durées plus courtes. On se référera au site <http://www.ihes.fr>

Nous avons vu que Schwartz attache à l'École polytechnique un institut de recherche ; celui-ci (voir le site <http://www.math.polytechnique.fr>) abrite des chercheurs de niveaux variés, les professeurs étant principalement ceux de l'École polytechnique ; symbiose entre l'enseignement de cette école et la recherche pure. L'École normale supérieure possède elle aussi un institut de recherche comparable : voir le site <http://www.dma.ens.fr/>. Des structures similaires existent à Lyon et à Cachan.

À l'heure actuelle, un grand pays se doit de posséder des enceintes où organiser systématiquement et des congrès sur tel ou tel thème, et des « congrès étendus » d'une durée d'un ou plusieurs mois, des « semestres » sur tel ou tel thème d'actualité. De telles structures voient le jour progressivement. L'Institut d'Oberwolfach en Allemagne, fondé en 1950, accueille, plus de 45 semaines par an, des rencontres d'une semaine sur pratiquement tous les thèmes où la recherche progresse. La France (la SMF pilotant l'opération) a créé en 1978 à Luminy (banlieue de Marseille) le CIRM (Centre international de recherche mathématique), organisé sur le modèle d'Oberwolfach ; il accueille plus de 200 chercheurs par an.

Créé dès l'avant-guerre avec l'aide financiere de Rockefeller, l'Institut Henri-Poincaré (IHP) de Paris abrita essentiellement tout ou partie du département de mathématiques de la Sorbonne jusqu'en 1968, avant le développement des universités et le déménagement vers le grand campus de Jussieu. Avec l'aide de l'université Paris VI, du CNRS et d'autres entités, l'IHP est devenu un centre qui organise des semestres spécialisés et gère l'organisation correspondante (accueil, cours, séminaires). Des structures intermédiaires de ce type se développent un peu partout, l'Institut Newton à Cambridge, l'Institut Mittag-Leffler à Stockholm. L'Italie a fondé à Trieste un centre de recherche essentiellement axé sur la formation des chercheurs des pays en voie de développement ; ses activités s'orientent d'abord vers la physique théorique, mais l'organisme abrite aujourd'hui un centre de mathématiques (pures). La France fonde en 1978 le CIMPA, afin de collaborer plus efficacement avec les pays en développement ; une création presque naturelle, vu notre passé colonial.

Davantage tourné vers les applications des mathématiques, il faut aussi citer l'INRIA (Institut national de recherches en informatique et applications).

Détaillons donc ces différents ensembles que forment le Collège de France, les centres de recherche, les grandes écoles, les universités et les autres pôles d'excellence. Les renseignements qui suivent ont été obtenus via le site : < http://math-doc.ujf-grenoble.fr/cgi-bin/labos.pl >, qu'il faut consulter régulièrement si l'on tient à être à jour. À noter : UMR signifie « unité mixte de recherches ».

Structures spécifiques

À tout seigneur tout honneur : le Collège de France (http://www.college-de-France.fr) est l'une des plus anciennes structures à offrir à des savants de premier plan des « chaires » où ils peuvent enseigner en toute liberté. Le Collège dispose d'un nombre total de 52 chaires ; mais leurs noms ne se déterminent qu'en fonction de celui qui détient cette chaire. Cela permet au Collège d'ajuster ses spécialités aux changements de la société. C'est ainsi que Jacques Tits occupe une chaire de « littérature grecque », devenue pour lui chaire de « théorie des groupes » ! Les cours sont publics, mais le Collège ne délivre pas de diplôme. Un détail amusant : les professeurs se recrutent par pure cooptation, mais l'usage veut qu'il y ait dans la liste proposée au ministre pour une nomination un deuxième choix, sorte de repoussoir (même si ce deuxième choix reste toujours de grand niveau, afin que l'on n'ait pas l'air de « forcer la main » au ministre). Le ministre choisit toujours le premier de la liste. Un « candidat » politiquement appuyé fut cependant choisi une fois dans l'histoire du Collège contre l'avis de ses pairs. Mais le contenu des cours professés chaque année devant être approuvé par l'assemblée générale du Collège, le pauvre postulant ne fut jamais autorisé à enseigner et retourna à sa chère Sorbonne !

Il n'y eut pas de chaire de mathématiques proprement dite au Collège de France jusqu'à tout récemment. Les mathématiques y sont entrées par le biais de l'astronomie, puis de la mécanique. Il n'y eut au début qu'une, puis deux chaires seulement. Les premiers mathématiciens du Collège sont Camille Jordan, Humbert, Henri Lebesgue, Jacques Hadamard, Szolem Mandelbrojt (l'oncle de Benoît Mandelbrot), Jean Leray, André Lichnerowicz (en physique mathématique), Jean-Pierre Serre, Jacques-Louis Lions, Jacques Tits. Le Collège a su s'adapter à l'importance des mathématiques dans la culture scientifique actuelle ; il y a aujourd'hui quatre mathématiciens : Alain Connes (chaire d'analyse et géométrie), Jean-Christophe Yoccoz (chaire d'équations différentielles et systèmes dynamiques), Pierre-Louis Lions (chaire d'équations aux dérivées partielles et applications), Don Zagier (chaire de théorie des nombres).

Étonnant collège, institution singulière en France, sans équivalent à l'étranger. Il enseigne véritablement « la science en train se faire ». Les 52 chaires de professeurs titulaires couvrent un vaste ensemble de disciplines : des mathématiques à l'étude des grandes civilisations, en passant par la physique, la chimie, la biologie et la médecine, la philosophie, la sociologie et l'économie, la préhistoire, l'archéologie et l'histoire, la linguistique. Un accueil tout particulier est réservé aux savants étrangers. Des professeurs titulaires étrangers font partie du corps professoral. Les titulaires de la chaire européenne et de la chaire internationale sont renouvelés chaque année. Une cinquantaine de savants étrangers sont enfin invités pendant un mois pour donner une série de conférences.

Chaire d'analyse et géométrie : titulaire, Alain Connes
Collège de France
3, rue d'Ulm
75231 Paris cedex 05
Tél. 01 44 27 17 90

Chaire de théorie des nombres : titulaire, Don Zagier
Collège de France
3, rue d'Ulm
75231 Paris cedex 05
Tél. 01 44 27 17 90

Chaire d'équations différentielles et systèmes dynamiques : titulaire, Jean-Christophe Yoccoz
Collège de France
3, rue d'Ulm
75231 Paris cedex 05
Tél. 01 44 27 17 90

Chaire d'équations aux dérivées partielles et applications : titulaire, Pierre-Louis Lions
Collège de France
3, rue d'Ulm
75231 Paris cedex 05
Tél. 01 44 27 17 90

La seule structure comparable au Collège, du moins pour les mathématiques et la physique théorique, est l'IHES de Bures-sur-Yvette. À cette grande différence près : l'Institut des hautes études scientifiques est une structure à la gestion entièrement privée. Cette particularité lui permet d'être à l'écart de toute bureaucratie, et donc de faire beaucoup plus de choses, d'utiliser ses finances de façon optimale. Les savants suivants y sont actuellement professeurs permanents : Mikhael Gromov, Maxim Kontsevitch et Laurent Lafforgue en mathématique, ainsi qu'Alain Connes (chaire honorifique Léon Motchane), puis Thibaud Damour et Nikita Nekrassov en physique mathématique.

Mais l'IHES accueille aussi chaque année un grand nombre de chercheurs, tant « post-docs » que chercheurs confirmés. Cela dans une structure très souple, où la durée du séjour des visiteurs peut aller de huit jours à deux ans. Ces visiteurs sont soit sollicités par l'Institut lui-même, soit choisis pour leur mérite dans la longue liste des candidats, car c'est un lieu exceptionnel pour la recherche : calme et voisinage de la plus grande place mathématique du monde : Paris et sa banlieue. Il s'agit, comme l'IAS de Princeton, d'un lieu tout à fait exceptionnel. En ce sens, l'IHES fait partie des 23 « European Research Centers on Mathematics », dont on trouvera la liste complète sur <www.crm.es/ercom> (voir aussi <www.emis.de> sur la Société européenne de mathématiques). On y trouve, outre l'IHES, l'IHP et le CIRM.

On peut évaluer le niveau des permanents de l'IHES en notant que parmi eux, il n'y a pas moins de sept médailles Fields : Thom, Grothendieck, Deligne, Connes, Bourgain, Kontsevitch, Lafforgue. Ce total de 7 sur les 44 médailles Fields attribuées à ce jour constitue un record mondial, si l'on excepte l'IAS de Princeton dont les possibilités financières sont bien supérieures.

À l'américaine, l'IHES abrite des « chaires Louis Michel » pour les visiteurs de premier plan ; Louis Michel y fut en effet professeur permanent en physique de 1962 à 1992. Notons aussi que, depuis 1958, l'IHES publie un journal mathématique, les *Publications mathématiques de l'IHES*. Pour en savoir plus, voir plus bas pour les journaux mathématiques français et le site <http://www.ihes.fr>

Un fait très important : comme l'IAS de Princeton, l'IHES possède, à Bures-sur-Yvette même, de nombreux logements qui lui permettent d'abriter ses visiteurs pendant toute la durée de leur séjour à des prix très raisonnables, ainsi qu'une cafétéria pour les repas de midi. Tout cela, joint à la petitesse de sa structure, fait que l'atmosphère de l'IHES est unique au monde pour favoriser la création. La liberté y règne de façon absolue, aucune pression pour assister à tel séminaire ou pour faire des conférences. Les chercheurs peuvent y vivre, soit de façon complètement monastique, soit profiter des séminaires, IHES ou parisiens, puisque nous avons vu que Paris offre chaque semaine des séminaires, des conférences dans pratiquement tous les domaines des mathématiques actuelles.

Institut des hautes études scientifiques
Le Bois Marie
35, route de Chartres
91440 Bures-sur-Yvette
Tél. 01 60 92 66 00
http://www.ihes.fr/

L'Institut Henri Poincaré, situé dans le centre de Paris, a plusieurs fonctions bien distinctes, et toutes essentielles à la vie mathématique française ; son nom complet est « Maison des mathématiciens et des physiciens ». Il est subventionné à la fois par le CNRS et l'université Pierre et Marie Curie (Paris VI). Et, de fait, il héberge aussi plusieurs sociétés savantes, surtout la SMF (Société mathématique de France : <http://smf.emath.fr>), mais aussi la SMAI (Société de mathématiques appliquées et industrielles : <http://smai.emath.fr>), la SFDS (Société française de statistique), l'association Femmes et mathématiques, ainsi que MathImage et la SFP (Société française de physique). Il fait partie, on l'a dit, des « European Research Centers on Mathematics ».

L'IHP accueille autour de sa bibliothèque le Centre Émile-Borel, où sont organisés des cours, séminaires et colloques dans le cadre de sessions ou « programmes » à thèmes semestriels ou trimestriels en mathématiques et en physique théorique, réunissant des chercheurs du monde entier et hébergeant la plupart des rencontres ou réunions nationales des mathématiciens français, de nombreux séminaires et cours réguliers ainsi que des stages organisés dans le cadre de la formation permanente, des jurys de concours, des réunions à caractère institutionnel et nombre de sociétés savantes qui bénéficient des infrastructures et services offerts par l'établissement.

L'Institut Henri-Poincaré est membre de l'IMSI (International Mathematical Sciences Institutes), qui regroupe au niveau européen et mondial les principaux centres de recherche comparables.

D'un point de vue administratif, l'IHP est à la fois une unité mixte de service associant le CNRS et l'université Pierre et Marie Curie (UMS 839), et une « école interne » de l'UPMC.

Sa sous-structure, le Centre Émile-Borel, rappelle l'Institut Isaac-Newton de Cambridge, le MSRI (Mathematical Research Institute) de Berkeley, le RIMS (Research Institute of Mathematical Science) de Kyoto ou l'ITP (Institute of Theoretical Physics) de Santa Barbara. Il organise et subventionne des activités ciblées thématiquement de deux à six mois. Ces activités regroupent en général au moins trois éléments: des cours magistraux par les grands experts du sujet, des séminaires, un auditoire fourni composé de Français, mais aussi de chercheurs étrangers subventionnés (séjour et salaires) et d'experts. Les sujets sont définis par un comité de programmation scientifique représentatif au niveau national et international. Les thèmes abordés vont des mathématiques les plus pures à la physique proche de l'expérimentation, en passant par les mathématiques appliquées susceptibles d'applications industrielles, la biologie ou l'informatique.

Institut Henri-Poincaré
UMS 839 : CNRS – université de Paris 6
11, rue Pierre-et-Marie-Curie
75231 Paris cedex 05
Tél. 01 44 27 67 89
http://www.ihp.jussieu.fr/

Le CIRM (Centre international de rencontres mathématiques) est modelé sur le centre de rencontre allemand d'Oberwolfach (situé en Forêt noire). Bien avant les années 1970, la nécessité de créer un site destiné aux séminaires internationaux de recherche en mathématiques faisait l'objet de nombreuses discussions au sein de la Société mathématique de France et les mathématiciens entreprenaient de nombreuses démarches en ce sens.

La création à Luminy d'un Centre international est inscrite (fin 1975) dans le projet de loi de finances pour 1976. La réhabilitation de l'ancienne bastide — alors en fort mauvais état — commence en 1977 ; elle se poursuivra juqu'en 1997. En 1981, une première tranche comportant l'hôtel et le restaurant est achevée. Les premiers colloques de mathématiques (18 par an environ) débutent en 1982. La bibliothèque du CIRM compte aujourd'hui 25 000 ouvrages.

Le CIRM accueille actuellement 2000 congressistes (mathématiciens) par an et se présente sous la forme d'une unité CNRS (UMS 822) constituée par la SMF et le CNRS.

Société mathématique de France
Centre international de rencontres mathématiques (CIRM)
UMS 822 : CNRS – SMF
Case 916
163, avenue de Luminy
13288 Marseille cedex 09
Tél. 04 91 83 30 00
http://www.cirm.univ-mrs.fr/

Le CIMPA (Centre international de mathématiques pures et appliquées) est une association internationale (loi 1901) fondée à Nice en 1978. Son objectif est de promouvoir la coopération internationale au profit des pays en développement, dans le domaine de l'enseignement supérieur, de la recherche en mathématiques et dans les disciplines connexes, informatique notamment. La coopération se fait avec de très nombreux pays : Mexique, Brésil, Argentine, Uruguay, Algérie, Roumanie ou Inde.

Centre international de mathématiques pures et appliquées
Le Dubellay
4, avenue Joachim – Bât. B
06100 Nice
Tél. 04 92 07 79 30
http://www.cimpa-icpam.org/

Créé en 1967 à Rocquencourt, près de Paris, l'INRIA (Institut national de recherche en informatique et en automatique) est un établissement public à caractère scientifique et technologique (EPST) placé sous la double tutelle du ministère de la Recherche et du ministère de l'Économie, des Finances et de l'Industrie.

L'INRIA a l'ambition d'être, au plan mondial, un institut de recherche au cœur de la société de l'information. Il s'agit de mettre en réseau les compétences et les talents de l'ensemble du dispositif de recherche français dans le domaine des NTIC. Ce réseau permet de mettre l'excellence scientifique au service des progrès technologiques, créateurs d'emplois, de richesses et de nouveaux usages répondant à des besoins sociaux-économiques en perpétuelle mutation. Son organisation décentralisée (six unités de recherche), ses petites équipes autonomes et évaluées régulièrement permettent à l'INRIA d'amplifier ses partenariats ; plus de la moitié des projets de recherche sont communs avec les universités, les grandes écoles et les organismes de recherche ; il renforce son implication dans les travaux de valorisation des résultats de recherche et le transfert technologique : 600 contrats avec l'industrie ont été passés et une soixantaine de sociétés sont issues de l'INRIA.

Institut national de recherche en informatique
et en automatique
Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P. 105, 78153 Le Chesnay cedex
Tél. 01 39 63 55 11
http://www.inria.fr

Centres associés aux écoles et aux universités

École centrale de Lyon

Laboratoire de mathématiques appliquées de Lyon (MAPLY)
UMR 5585 : CNRS – École centrale de Lyon
INSA Lyon – université Lyon 1
Bât. 6 – Département de mathématiques et informatique
36, avenue Guy-de-Collongue
B.P. 163, 69131 Écully cedex
Tél. 04 72 18 64 42
http://maply.univ-lyon1.fr/

École normale supérieure Cachan

Institut de recherche mathématique de Rennes (IRMAR)
UMR 6625 : CNRS – École normale supérieure Cachan – INSA Rennes – université de Rennes 1
Institut de mathématique, Campus de Beaulieu
35042 Rennes cedex
Tél. 02 23 23 66 70
http://www.maths.univ-rennes1.fr/irmar

Centre de mathématiques et de leurs applications (CMLA)
UMR 8536 : CNRS – École normale supérieure de Cachan
Bâtiment Laplace
61, avenue du Président-Wilson
94235 Cachan cedex
Tél. 01 47 40 59 00
http://www.cmla.ens-cachan.fr/

Laboratoire de mathématiques appliquées Mathématique des systèmes perceptifs et cognitifs (MSPC)
GDR 2286 : CNRS
École normale supérieure Cachan
61, avenue du Président-Wilson
94235 Cachan cedex
Tél. 01 47 40 59 18

École normale supérieure Lyon

Unité de mathématiques pures et appliquées (UMPA/ENSL)
UMR 5669 : CNRS – École normale supérieure Lyon
46, allée d'Italie
69364 Lyon cedex 07
Tél. 04 72 72 84 24 ou 04 72 72 84 85
http://www.umpa.ens-lyon.fr/

École normale supérieure Paris

Département de mathématiques et applications (DMA)
UMR 8553 : CNRS – École normale supérieure Paris
45, rue d'Ulm
75230 Paris cedex 05
Tél. 01 44 32 20 72
http://www.dma.ens.fr/

École polytechnique

Centre de mathématiques appliquées
UMR 7641 : CNRS – École polytechnique – université de Versailles St-Quentin
Centre de mathématiques
École polytechnique
Plateau de Palaiseau
91128 Palaiseau cedex
Tél. 01 69 33 41 50
http://www.cmap.polytechnique.fr/

Centre de mathématiques Laurent Schwartz
UMR 7640 : CNRS – École polytechnique
Centre de mathématiques
École polytechnique
Plateau de Palaiseau
91128 Palaiseau cedex
Tél. 01 69 33 40 91
http://math.polytechnique.fr/

Centre de calcul formel MEDICIS
FRE 2341 : CNRS – École polytechnique
Centre de mathématiques
École polytechnique
Plateau de Palaiseau
91128 Palaiseau cedex
Tél. 01 69 33 34 65
http://www.stix.polytechnique.fr/

Analyse des équations aux dérivées partielles (AEDP)
GDR 2434 : CNRS
Centre de mathématiques
École polytechnique
Plateau de Palaiseau
91128 Palaiseau cedex
Tél. 01 69 33 37 12

École nationale supérieure de mécanique et d'aérotechnique (ENSMA)

Laboratoire de modélisation mécanique et de mathématiques appliquées (L3MA)
EA 1214 – université de Poitiers – ENSMA
SP2MI – Téléport 2
Boulevard Marie-et-Pierre-Curie
B.P. 30179, 86962 Futuroscope-Chasseneuil cedex
Tél. 05 49 49 67 90
http://labo.univ-poitiers.fr/l3ma/

INSA de Lyon

Laboratoire de mathématiques appliquées de Lyon (MAPLY)
UMR 5585 : CNRS – École centrale de Lyon – INSA Lyon – université Lyon 1
INSA de Lyon
Léonard de Vinci
21, avenue Jean-Capelle
69621 Villeurbanne cedex
Tél. 04 72 43 83 12
http://maply.univ-lyon1.fr/

INSA de Rennes

Institut de recherche mathématique de Rennes (IRMAR)
UMR 6625 : CNRS – École normale supérieure Cachan – INSA Rennes – université de Rennes 1
Institut de mathématique, Campus de Beaulieu
35042 Rennes cedex
Tél. 02 23 23 66 70
http://www.maths.univ-rennes1.fr/irmar

INSA de Rouen

Laboratoire mathématique de l'INSA (LMI)
EA 3226 – université de Rouen – INSA de Rouen
LMI – INSA de Rouen
4, place Émile-Blondel
B.P. 08, 76131 Mont-Saint-Aignan cedex
Tél. 02 35 52 83 31
http://lmi.insa-rouen.fr/

INSA de Toulouse

Mathématiques pour l'industrie et la physique (MIP)
UMR 5640 : CNRS – université de Toulouse 3 Paul Sabatier – INSA Toulouse – université de Toulouse 1
UFR Mathématiques, Informatique, Gestion
118, route de Narbonne
31062 Toulouse cedex 04
Tél. 05 61 55 83 14

Laboratoire de statistiques et probabilités (LSP)
UMR 5583 : CNRS – université de Toulouse 3 Paul Sabatier – INSA Toulouse
UFR Mathématiques, Informatique, Gestion, Bât. 1R1
Université de Toulouse 3 – Paul Sabatier
118, route de Narbonne
31062 Toulouse cedex 04
Tél. 05 61 55 67 72

Université Aix-Marseille 1

Fédération de recherche des unités de mathématiques de l'aire marseillaise (FRUMAM)
FR 2291 : CNRS
Campus de Luminy, case 907
13288 Marseille cedex 09
Tél. 04 91 26 95 44

Institut de mathématiques de Luminy (IML)
UPR 9016 : CNRS
Campus de Luminy, case 907
13288 Marseille cedex 09
Tél. 04 91 26 96 30
http://iml.univ-mrs.fr

Université Aix-Marseille 2

Fédération de recherche des unités de mathématiques de l'aire marseillaise (FRUMAM)
FR 2291 : CNRS
Campus de Luminy, case 907
13288 Marseille cedex 09
Tél. 04 91 26 95 44

Centre de physique théorique (CPT)
UPR 7061 : CNRS
Campus de Luminy, case 907
13288 Marseille cedex 09
Tél. 04 91 26 95 00

Université Aix-Marseille 3

Fédération de recherche des unités de mathématiques de l'aire marseillaise (FRUMAM)
FR 2291 : CNRS
Campus de Luminy, case 907
13288 Marseille cedex 09
Tél. 04 91 26 95 44

Laboratoire d'analyse, topologie, probabilités (LATP)
UMR 6632 : CNRS – université d'Aix-Marseille 1 université d'Aix-Marseille 3
LATP, Faculté des sciences et techniques de Saint-Jérôme
Avenue Escadrille-Normandie-Niémen
Case Cour A
13397 Marseille cedex 20
Tél. 04 91 28 89 10
http://www.latp.univ-mrs.fr/

Université de Haute-Alsace

Laboratoire de mathématiques
et applications
EA 1108 – université de Haute Alsace
UFR Sciences et techniques
4, rue des Frères-Lumière
68093 Mulhouse cedex
Tél. 03 89 33 64 25

Université d'Angers

Algèbre et géométrie
UMR 6093 : CNRS – université d'Angers
2, boulevard Lavoisier
49045 Angers cedex 01
Tél. 02 41 73 53 94
Mél. secretariat.math@univ-angers.fr

Université d'Artois

Laboratoire de mathématiques de Lens
EA 2462 – université d'Artois
Faculté Jean Perrin
Rue Jean-Souvraz
SP 18, 62307 Lens cedex
Tél. 03 21 79 17 20

Université d'Avignon et des Pays de Vaucluse

Laboratoire d'analyse non linéaire
et géométrie
EA 2151 – université d'Avignon
et des Pays de Vaucluse
Faculté des sciences
3, rue Louis-Pasteur
84000 Avignon
Tél. 04 90 14 44 10
Mél. math@univ-avignon.fr

Université Bordeaux 1

Laboratoire de mathématiques pures
UMR 5467 : CNRS – université de Bordeaux 1
351, cours de la Libération
33405 Talence cedex
Tél. 05 56 84 61 26
Web : http://www.math.u-bordeaux.fr/maths/index.php?site=labag

Laboratoire de mathématiques appliquées (MAB)
UMR 5466 : CNRS – université de Bordeaux 1
université de Bordeaux 2
351, cours de la Libération
33405 Talence cedex
Tél. 05 40 00 61 07
http://www.math.u-bordeaux.fr/math_appli/

Théorie des nombres et algorithmique
arithmétique (A2X)
UMR 5465 : CNRS – université de Bordeaux 1
Université de Bordeaux 1 (A2X)
351, cours de la Libération
33405 Talence cedex
Tél. 05 56 84 61 02
http://www.math.u-bordeaux.fr/a2x/

Analyse fonctionnelle et harmonique (AFH)
GDR 2101 : CNRS
351, cours de la Libération
33405 Talence cedex
Tél. 05 56 84 61 26

Réseau de théorie analytique des nombres
GDR 495 : CNRS
351, cours de la Libération,
33405 Talence cedex
Tél. 05 57 57 10 69

Université de Bourgogne

Laboratoire de topologie
UMR 5584 : CNRS – université de Bourgogne
UFR Sciences et techniques
9, avenue Alain-Savary
B.P. 47870, 21078 Dijon cedex
Tél. 03 80 39 58 20
http://math.u-bourgogne.fr/topologie/

Laboratoire d'analyse appliquée
et d'optimisation
EA 555 – université de Bourgogne
UFR Sciences et techniques
9, avenue Alain-Savary
B.P. 47870, 21078 Dijon cedex
Tél. 03 80 39 58 70
http://www.u-bourgogne.fr/monge/aaopt/

Laboratoire Gevrey de mathématique
physique
UMR 5029 : CNRS – université de Bourgogne
UFR Sciences et Techniques
9, avenue Alain Savary
B.P. 47870, 21078 Dijon cedex
Tél. 03 80 39 58 50
http://www.u-bourgogne.fr/monge/phy.math/

Université de Bretagne occidentale

Laboratoire de mathématiques
FRE 2218 : CNRS – université de Bretagne
occidentale
UFR Sciences et techniques
6, avenue Victor-Le-Gorgeu
B.P. 809, 29285 Brest cedex
Tél. 02 98 01 62 07
http://maths2.univ-brest.fr/

Algèbre non commutative et théorie des
invariants en théorie des représentations
GDR 2432 : CNRS
Université de Bretagne occidentale
6, avenue Victor-Le-Gorgeu
29285 Brest cedex
Tél. 02 98 01 69 86

Université de Bretagne-Sud

Mathématiques et applications
des mathématiques
JE 2207 – université de Bretagne-Sud
Centre de recherche, Campus de Tohannic
B.P. 573, 56017 Vannes
Tél. 02 97 68 42 10

Université de Caen

Laboratoire de structures discrètes
et analyse diophantienne (SDAD)
UMR 6139 : CNRS – université de Caen
Université de Caen – Département
de Mathématiques – SDAD, Campus II
Boulevard du Maréchal-Juin
B.P. 5186, 14032 Caen cedex 05
Tél. 02 31 56 73 22
http://www.math.unicaen.fr/lmno/

Tresses et algèbre autodistributive
GDR 2105 : CNRS
Université de Caen – Département
de mathématiques – SDAD, Campus II
Boulevard du Maréchal-Juin
B.P. 5186, 14032 Caen cedex 05
Tél. 02 31 56 73 22

Université de Cergy-Pontoise

Laboratoire d'analyse, géométrie
et modélisation
UMR 8088 : CNRS – université de Cergy-Pontoise
Site de Saint-Martin
2, avenue Adolphe-Chauvin
95302 Cergy-Pontoise cedex
Tél. 01 34 25 65 35

Université de Clermont-Ferrand 1

Laboratoire de logique, algorithmique
et informatique (LLAIC1)
EA 2146 – université de Clermont-Ferrand 1
IUT, Complexe universitaire des Cézeaux
B.P. 86, 63172 Aubière cedex
Tél. 04 73 40 63 63

Université de Clermont-Ferrand 2

Laboratoire de mathématiques pures
EA 986 – université de Clermont-Ferrand 2
UFR Recherche scientifique et technique
Complexe universitaire des Cézeaux
63177 Aubière cedex
Tél. 04 73 40 70 70

Laboratoire de mathématiques appliquées
UMR 6620 : CNRS – université de Clermont-Ferrand 2
UFR Recherche scientifique et technique
Complexe universitaire des Cézeaux
63177 Aubière cedex
Tél. 04 73 40 70 50

Réseau d'algèbres d'opérateurs (RAO)
GDR 670 : CNRS
Université de Clermont-Ferrand 2
Complexe universitaire des Cézeaux
Département de mathématiques
63177 Aubière cedex
Tél. 04 73 40 70 85

Université de technologie de Compiègne

Laboratoire de mathématiques appliquées
EA 2222 – Université de technologie
de Compiègne
Centre de recherches de Royallieu
B.P. 20 529, 60205 Compiègne cedex
Tél. 03 44 23 46 43
http://www.dma.utc.fr/

Université d'Évry-val d'Essonne

Statistique et génomes
ESA 8071 : CNRS – université d'Évry-Val
d'Essonne
Tour Évry 2
523, place des Terrasses-de-l'Agora
91000 Évry cedex
Tél. 01 60 87 38 00

Département de mathématiques
EA 2172 – université d'Évry-Val d'Essonne
Laboratoire d'analyse et probabilités,
Département de mathématiques
Boulevard François-Mitterrand,
91025 Évry cedex
Tél. 01 69 47 02 01

Université de Franche-Comté

Laboratoire de mathématiques
UMR 6623 : CNRS – université
de Franche-Comté
Département de mathématiques
16, route de Gray
25030 Besançon cedex
Tél. 03 81 66 63 40

Théorie des nombres
GDR 1097 : CNRS
Département de mathématiques
16, route de Gray
25030 Besançon cedex
Tél. 03 81 66 63 28

Université de Grenoble 1

Laboratoire de modélisation et calcul (LMC)
UMR 5523 : CNRS – université de Grenoble 1
IMAG
51, rue des Mathématiques
B.P. 53, 38041 Grenoble cedex 09
Tél. : 04 76 51 43 42
http://www-lmc.imag.fr/

Cellule MathDoc
UMS 5638 : CNRS – université Grenoble 1
B.P. 53, 38041 Grenoble cedex 09
Tél. 04 76 63 56 36
http://www-mathdoc.ujf-grenoble.fr/

Institut Fourier
UMR 5582 : CNRS – université de Grenoble 1
Laboratoire de mathématiques
B.P. 74, 38402 Saint-Martin-d'Hères cedex
Tél. 04 76 51 46 56
http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/

Université de La Réunion

Institut de recherche en mathématiques
et informatique appliquées (IREMIA)
EA 2525 – université de La Réunion
15, avenue René-Cassin
B.P. 7151
97715 Saint-Denis Messag. cedex 09
Tél. (0262) 93 82 82

Université de La Rochelle

Laboratoire de mathématiques calcul
asymptotique (LMCA)
JE 2000 – université de La Rochelle
Pôle sciences et technologies
Avenue Michel-Crépeau
17042 La Rochelle cedex 01
Tél. 05 46 45 82 01

Université du Havre

Laboratoire de mathématiques appliquées
du Havre (LMAH)
Université du Havre
Faculté des sciences et techniques
25, rue Philippe-Lebon
B.P. 540, 76058 Le Havre cedex
Tél. 02 32 74 43 46
http://www-lmah.univ-lehavre.fr/

Université de Lille 1

Laboratoire d'arithmétique, géométrie,
analyse, topologie
UMR 8524 : CNRS – université de Lille 1
UFR de mathématiques pures et appliquées
Bâtiment M2
B.P. 36, 59655 Villeneuve-d'Ascq cedex
Tél. 03 20 43 48 50

Laboratoire de statistiques et probabilités
FRE 2222 : CNRS – université de Lille 1
UFR de mathématiques pures et appliquées
Bâtiment M2
B.P. 36, 59655 Villeneuve-d'Ascq cedex
Tél. 03 20 33 61 64

Université de Limoges

Laboratoire d'arithmétique, de calcul formel
et d'optimisation (LACO)
UMR 6090 : CNRS – université de Limoges
Département de mathématiques
123, avenue Albert-Thomas
87060 Limoges cedex
Tél. 05 55 45 73 23

Université de Lyon 1

Laboratoire de probabilités, combinatoire et statistique (LAPCS)
EA 2032 – université de Lyon 1
Bâtiment Recherche (B), Domaine de Gerland
50, avenue Tony-Garnier
69366 Lyon cedex 07
Tél. 04 37 28 74 79

Laboratoire de mathématiques appliquées de Lyon (MAPLY)
UMR 5585 : CNRS – École centrale de Lyon
INSA Lyon – université Lyon 1
Département de mathématiques – Bât. 101
La Doua
43, boulevard du 11-Novembre-1918
69622 Villeurbanne cedex
Tél. 04 72 44 85 24
http://www.maply.univ-lyon1.fr/

Équipe de modélisation et calcul scientifique
JE 2268 – université de Lyon 1
Bâtiment ISTIL
Boulevard Latarjet
69622 Villeurbanne cedex
Tél. 04 72 43 29 66

Institut Girard-Desargues (IGD)
UMR 5028 : CNRS – université de Lyon 1
Département de mathématiques, Bâtiment Braconnier (ex-101)
21, avenue Claude-Bernard
69622 Villeurbanne cedex
Tél. 04 72 43 15 79

Euro – GDR Mathematics and Quantum Physics
GDR 2279 : CNRS
IPNL – Bât. Paul-Dirac
Domaine scientifique de la Doua
4, rue Enrico-Fermi
69622 Villeurbanne cedex
Tél. 04 72 43 10 61

Université de Marne-la-Vallée

Laboratoire d'analyse et de mathématiques appliquées
UMR 8050 : CNRS – université de Marne-la-Vallée – université de Paris 12
Unité de mathématiques, Cité Descartes
77454 Marne-la-Vallée cedex 02
Tél. 01 60 95 75 20

Université de Metz

Laboratoire de mathématiques (Méthodes mathématiques pour l'analyse des systèmes) (MMAS)
FRE 2344 : CNRS – université de Metz
Île du Saulcy, ISGMP, Bâtiment A
57045 Metz
Tél. 03 87 31 52 74
http://www.mmas.univ-metz.fr/

Université de Montpellier 2

Laboratoire de probabilités et statistiques
EA 720 – université de Montpellier 2
Département de mathématiques
Place Eugène-Bataillon
34095 Montpellier cedex 05
Tél. 04 67 14 35 05

Laboratoire d'analyse, calcul scientifique industriel et optimisation de Montpellier (ACSIOM)
FRE 2311 : CNRS – université de Montpellier 2
Département de mathématiques
Place Eugène-Bataillon
34095 Montpellier cedex 05
Tél. 04 67 14 39 63

Laboratoire de géométrie, topologie et algèbre (GETODIM)
UMR 5030 : CNRS – université de Montpellier 2
Département de mathématiques
Place Eugène-Bataillon
34095 Montpellier cedex 05
Tél. 04 67 14 35 54

Université Nancy 1

Institut Élie-Cartan
UMR 7502 : CNRS – université Henri-Poincaré
INRIA
UFR STMIA
B.P. 239, 54506 Vandœuvre-lès-Nancy cedex
Tél. 03 83 68 45 64

Applications nouvelles de l'optimisation de forme (ANOFOR)
GDR 2431 : CNRS
Institut Élie-Cartan
B.P. 239, 54506 Vandœuvre-lès-Nancy cedex
http://www.anofor.iecn.u-nancy.fr/

Université de Nantes

Laboratoire de mathématiques Jean-Leray
UMR 6629 : CNRS – université de Nantes
Département de mathématiques
2, rue de la Houssinière
B.P. 92208, 44322 Nantes cedex 03
Tél. 02 51 12 59 01
http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/umr6629/

Université de Nice-Sophia Antipolis

Laboratoire Jean-Alexandre-Dieudonné
UMR 6621 : CNRS – université de Nice-Sophia Antipolis
Parc Valrose
06108 Nice cedex 02
Tél. 04 92 07 62 29

Institut non linéaire de Nice-Sophia-Antipolis (INLN)
UMR 6618 : CNRS – université de Nice-Sophia Antipolis
1361, route des Lucioles
06560 Valbonne
Tél. 04 92 96 73 00

Groupement de recherche européen en topologie algébrique
GDRE 1110 : CNRS
Laboratoire J.-A.-Dieudonné,
UMR 6621 du CNRS
Parc Valrose
06108 Nice cedex 02
Tél. 04 92 07 62 17

Géométrie algébrique complexe (GAC)
GDR 678 : CNRS
Laboratoire J.-A.-Dieudonné
Parc Valrose
06108 Nice cedex 02
Tél. 04 92 07 62 04

Université d'Orléans

Laboratoire de mathématiques et applications physique mathématique (MAPMO)
UMR 6628 : CNRS – université d'Orléans
UFR Sciences fondamentales et appliquées
B.P. 6759, 45067 Orléans cedex 02
Tél. 02 38 41 72 04

Université Paris 1

Statistique appliquée et modélisation stochastique (SAMOS)
UMR 8595 : CNRS – université de Paris 1
SAMOS C2102, Centre Pierre-Mendès-France
75634 Paris cedex 13
Tél. 01 44 07 89 35

Centre de recherche de mathématiques, statistique et économie mathématique (CERMSEM)
EA 1444 – université de Paris 1
Maison des sciences économiques
106/112, boulevard de l'Hôpital
75647 Paris
Tél. 01 44 07 83 00
http://www.cermsem.univ-paris1.fr/

Université de Paris 5

Mathématiques appliquées à Paris 5 (MAP5)
FRE 2428 : CNRS – université de Paris 5
UFR de mathématiques et informatique
45, rue des Saints-Pères
75270 Paris cedex 06
Tél. 01 44 55 35 38
http://www.math-info.univ-paris5.fr/map5/

Université de Paris 6

Laboratoire de probabilités et modèles aléatoires (PMA)
UMR 7599 : CNRS – université de Paris 6
175, rue du Chevaleret, Boîte courrier 188
75013 Paris
Tél. 01 44 27 53 19
http://www.proba.jussieu.fr/

Institut de mathématiques
UMR 7586 : CNRS – université de Paris 6
175, rue du Chevaleret
75013 Paris
Tél. 01 44 27 75 68
http://www.institut.math.jussieu.fr/

Laboratoire de statistique théorique et appliquée
EA 3124 – université de Paris 6
175, rue du Chevaleret – Bât. A
75013 Paris
Tél. 01 44 27 85 62
http://www.ccr.jussieu.fr/lsta/

Laboratoire Jacques-Louis-Lions
UMR 7598 : CNRS – université de Paris 6
175, rue du Chevaleret, Boîte courrier 187
75252 Paris cedex 05
Tél. 01 44 27 42 98
http://www.ann.jussieu.fr/

Institut Henri-Poincaré
UMS 839 : CNRS – université de Paris 6
11, rue Pierre-et-Marie-Curie
75231 Paris cedex 05
Tél. 01 44 27 67 89
Web : http://www.ihp.jussieu.fr/

Congrès nationaux d'analyse numérique (CANUM)
GDR 2290 : CNRS
Université Pierre-et-Marie-Curie (Paris 6)
4, place Jussieu, case 187
75252 Paris cedex 05
Tél. 01 44 27 42 98

Université de Paris 7

Recherches épistémologiques et historiques sur les sciences exactes et les institutions scientifiques (REHSEIS)
UMR 7596 : CNRS – université de Paris 7
Université Paris 7, REHSEIS – UMR 7596
2, place Jussieu
75251 Paris cedex 05
Tél. 01 44 27 86 46
http://www.rehseis.cnrs.fr/

Équipe de recherche en didactique des mathématiques (DIDIREM)
EA 1547 – université de Paris 7
2, place Jussieu, case 7018
75251 Paris cedex 05
Tél. 01 44 27 53 83 ou 01 44 27 53 84
http://www.didirem.math.jussieu.fr/didirem.html

Laboratoire de probabilités et modèles aléatoires (PMA)
UMR 7599 : CNRS – université de Paris 6
175, rue du Chevaleret, Boîte courrier 188
75013 Paris
Tél. 01 44 27 53 19
http://www.proba.jussieu.fr/

Équipe de logique mathématique
UMR 7056 : CNRS – université de Paris 7
Université Denis-Diderot, UFR de mathématiques, case 7012
75251 Paris cedex 05
Tél. 01 44 27 37 68
http://www.logique.jussieu.fr/

Institut de mathématiques
UMR 7586 : CNRS – université de Paris 6
175, rue du Chevaleret
75013 Paris
Tél. 01 44 27 75 68
http://www.institut.math.jussieu.fr/

Université de Paris 9

Centre de recherches en mathématiques de la décision (CEREMADE)
UMR 7534 : CNRS – université de Paris 9
Université de Paris 9 – Dauphine
Place du Maréchal-de-Lattre-de-Tassigny
75775 Paris cedex 16
Tél. 01 44 05 49 23
http://www.ceremade.dauphine.fr/

Université de Paris 10

Laboratoire de modélisation aléatoire (MODALX)
JE 421 – université de Paris 10
UFR SEGMI
200, avenue de la République
92001 Nanterre cedex
Tél. 01 40 97 78 26

Université Paris-Sud-11

Laboratoire d'applications scientifiques du calcul intensif (ASCI)
FRE 2480 : CNRS
ASCI Bâtiment 506
91403 Orsay cedex
Tél. 01 69 35 84 00

Bibliothèque Jacques-Hadamard (Bibliothèque mathématiques d'Orsay)
UMS 1786 : CNRS – université de Paris 11
ASCI Bâtiment 425
91405 Orsay cedex
Tél. 01 69 15 70 51

Modélisation mathématique et simulations numériques liées aux études d'entreposage souterrain de déchets radioactifs (MOMAS)
GDR 2439 : CNRS
ASCI Bâtiment 506
91405 Orsay cedex
Tél. 01 69 35 84 00

Université de Paris 12-Val-de-Marne

Centre de mathématiques
EA 2343 – université de Paris 12
61, avenue du Général-de-Gaulle
94010 Créteil cedex
Tél. 01 45 17 16 42

Université de Paris 13

Laboratoire d'analyse, géométrie et applications (LAGA)
UMR 7539 : CNRS – université de Paris 13
LAGA – UMR 7539, Institut Galilée – université Paris 13
99, avenue J.-B.-Clément
93430 Villetaneuse
Tél. 01 49 40 38 92
http://www-math.math.univ-paris13.fr/laga2/present/

Université de Pau et des Pays de l'Adour

Laboratoire de mathématiques appliquées
ERS 2055 : CNRS – université de Pau et des Pays de l'Adour
Bâtiment IPRA
Avenue de l'Université
B.P. 290, 64000 Pau
Tél. 05 59 92 30 47
http://www.univ-pau.fr/recherche/lma/

Université de Perpignan

Laboratoire de modélisation, analyse non linéaire et optimisation (MANO)
EA 1944 – université de Perpignan
UFR des sciences fondamentales
52, avenue de Villeneuve
66860 Perpignan cedex
Tél. 04 68 66 21 26
http://www.univ-perp.fr/see/rch/mano/

Université de Picardie

Laboratoire amiénois de mathématique fondamentale et appliquée (LAMFA)
UMR 6140 : CNRS – université de Picardie
UFR mathématiques et informatique
33, rue Saint-Leu
80039 Amiens cedex
Tél. 03 22 82 79 70
Web : http://www.mathinfo.u-picardie.fr/

Université de Poitiers

Laboratoire de groupes de Lie et géométrie (GLG)
UMR 6086 : CNRS – université de Poitiers
UFR sciences, Département de mathématiques, SP2MI
Boulevard Marie-et-Pierre-Curie
B. P. 30179, 86960 Futuroscope-Chasseneuil Cedex
Tél. 05 49 49 69 00

Laboratoire de modélisation mécanique
et de mathématiques appliquées (L3MA)
EA 1214 – université de Poitiers – ENSMA
(École nationale supérieure de mécanique
et d'aérotechnique)
SP2MI – Téléport 2
Boulevard Marie-et-Pierre-Curie
B.P. 30179, 86962 Futuroscope-Chasseneuil
cedex
Tél. 05 49 49 67 90
http://labo.univ-poitiers.fr/l3ma/

Université de Reims

Laboratoire de mathématiques
UMR 6056 : CNRS – université de Reims
Université de Reims, Moulin de la Housse
B.P. 1039, 51687 Reims cedex 2
Tél. 03 26 91 83 87 (ou 67)

Université de Rennes 1

Institut de recherche mathématique
de Rennes (IRMAR)
UMR 6625 : CNRS – École normale supérieure
Cachan – INSA Rennes – université de Rennes 1
Institut de mathématiques, Campus
de Beaulieu
35042 Rennes cedex
Tél. 02 23 23 66 70
http://www.maths.univ-rennes1.fr/irmar

Université de Rouen

Laboratoire de mathématiques Raphaël-
Salem (LMRS)
UMR 6085 : CNRS – université de Rouen
24 bis, rue Jacques-Boutrolle, Site Colbert
B.P. 118, 76821 Mont-Saint-Aignan cedex
Tél. 02 35 14 71 00
http://www.univ-rouen.fr/lmrs/

Laboratoire mathématique de l'INSA (LMI)
EA 3226 – université de Rouen – INSA de Rouen
LMI – INSA de Rouen
4, place Émile-Blondel
B.P. 08, 76131 Mont-Saint-Aignan cedex
Tél. 02 35 52 83 31
http://lmi.insa-rouen.fr/

Université de Saint-Étienne

Laboratoire d'arithmétique et d'algèbre
(LARAL)
EA 769 – université de Saint-Étienne
UFR sciences et techniques, Site Métare
23, rue du Docteur-Paul-Michelon
42023 Saint-Étienne cedex 2
Tél. 04 77 48 15 00
http://www.univ-st-etienne.fr/laral/

D.E.A. Mathématiques
Équipe d'analyse numérique
de Saint-Étienne
EA 3058 – université de Saint-Étienne
Département de mathématiques
23, rue du Docteur-Paul-Michelon
42023 Saint-Étienne cedex 2
Tél. 04 77 48 15 00
http://www.univ-st-etienne.fr/anum/

Université de Savoie

Laboratoire de mathématiques (LAMA)
UMR 5127 : CNRS – université de Savoie
Campus scientifique
B.P. 1104, 73376 Le Bourget-du-Lac cedex 05
Tél. 04 79 75 87 20

Séminaire sud-rhodanien de géométrie
GDR 144 : CNRS
Campus scientifique
B.P. 1104, 73376 Le Bourget-du-Lac cedex 05
Tél. 04 79 75 87 20

Université de Strasbourg 1

Institut de recherche mathématique avancée (IRMA)
UMR 7501 : CNRS – université Louis-Pasteur
7, rue René-Descartes
67084 Strasbourg cedex
Tél. 03 90 24 01 29
http://www-irma.u-strasbg.fr/

Université de Toulon et du Var

Laboratoire d'analyse non linéaire appliquée
EA 2134 – université de Toulon et du Var
UFR sciences et techniques
Avenue de l'Université
B.P. 132, 83957 La Garde cedex
Tél. 04 94 14 20 75

Groupe de recherche en informatique et mathématiques (GRIM)
EA 1355 – université de Toulon et du Var
UFR sciences et techniques
Avenue de l'Université
B.P. 132, 83957 La Garde cedex
Tél. 04 94 14 20 75

Université de Toulouse 1

Mathématiques pour l'industrie et la physique (MIP)
UMR 5640 : CNRS – université de Toulouse 3 – Paul-Sabatier – INSA Toulouse – université Toulouse 1
UFR MIG, université de Toulouse 3 – Paul-Sabatier
118, route de Narbonne
31062 Toulouse cedex 04
Tél. 05 61 55 83 14
http://www.mip.ups-tlse.fr/

Université de Toulouse 3 – Paul-Sabatier

Laboratoire Émile-Picard
UMR 5580 : CNRS – université de Toulouse 3 Paul-Sabatier
UFR MIG, université de Toulouse 3 Paul-Sabatier
118, route de Narbonne
31062 Toulouse cedex 04
Tél. 05 61 55 67 85

Mathématiques pour l'industrie et la physique (MIP)
UMR 5640 : CNRS – université de Toulouse 3 Paul-Sabatier – INSA Toulouse – Université de Toulouse 1
UFR MIG, université Toulouse 3 Paul-Sabatier
118, route de Narbonne
31062 Toulouse cedex 04
Tél. 05 61 55 83 14
http://www.mip.ups-tlse.fr/

Laboratoire de statistiques et probabilités (LSP)
UMR 5583 : CNRS – université de Toulouse 3 Paul-Sabatier – INSA Toulouse
UFR MIG, université Toulouse 3 – Paul-Sabatier, Bât. 1R1
118, route de Narbonne
31062 Toulouse cedex 04
Tél. 05 61 55 67 72

Université de Tours

Laboratoire de mathématiques et physique théorique
UMR 6083 : CNRS – université de Tours
UFR sciences, Département de mathématiques
Parc de Grandmont
37200 Tours cedex
Tél. 02 47 36 69 25

Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis

Laboratoire de mathématiques (LAMATH)
EA 2441 – université de Valenciennes
et du Hainaut-Cambrésis
LAMATH – ISTV2,
Université de Valenciennes
Le Mont-Houy,
59313 Valenciennes cedex 09
Tél. 03 27 51 19 01
http://www.univ-valenciennes.fr/lamath/

Laboratoire de mathématiques appliquées
au calcul scientifique (MACS)
EA 1379 – université de Valenciennes et
du Hainaut-Cambrésis
Le Mont-Houy
B.P. 311, 59313 Valenciennes cedex 09
Tél. 03 27 51 19 27
http://www.univ-valenciennes.fr/macs/

Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines

Laboratoire de mathématiques appliquées
UMR 7641 : CNRS – École polytechnique
université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines
Bâtiment Fermat
45, avenue des États-Unis
78035 Versailles cedex
Tél. 01 39 25 46 44
http://www.math.uvsq.fr/umr7641/

Laboratoire de mathématiques
UMR 8100 : CNRS – université de Versailles
Saint-Quentin-en-Yvelines
Bâtiment Fermat
45, avenue des États-Unis
78035 Versailles cedex
Tél. 01 39 25 46 44
http://www.math.uvsq.fr/lama/lam.html

On consultera également le site Internet <http://www.univ-irem.fr> qui regroupe tous les instituts de recherche sur l'enseignement des mathématiques.
De même, le ministère de la Recherche donne la liste complète des unités et laboratoires de recherche sur son site : <http://dr.education.fr>

c Sociétés scientifiques et journaux mathématiques

Les sociétés scientifiques

L'Académie des sciences est la plus vieille institution scientifique française. Les académies des autres pays seront presque toutes organisées sur le même modèle. Voici la liste actuelle de ses membres, dans la section de mathématiques, mais aussi celle des sciences mécaniques (ce qui permet d'englober plus de mathématiciens qu'avec les seules « mathématiques »). La première année mentionnée se réfère à la naissance, la seconde à l'entrée à l'Académie.

Pour les mathématiques :

Thierry Aubin (1942–2003)
Jean-Michel Bismut (1948–1991)
Jean-Michel Bony (1942–2000)
Haïm Brézis (1944–1988)
Henri Cartan (1904–1974)
Gustave Choquet (1915–1976)
Alain Connes (1947–1982)
Jean-Marc Fontaine (1944–2002)
Étienne Ghys
Mikhael Gromov (1943–1997)
Jean-Pierre Kahane (1926–1998)
Maxim Kontsevitch (1966–2002)
Laurent Lafforgue (1966–2003)
Gérard Laumon
Pierre Lelong (1912–1985)
Pierre-Louis Lions (1956–1994)
Bernard Malgrange (1928–1988)
Paul Malliavin (1925–1979)
Gilles Pisier (1950–2002)
Jean-Pierre Serre (1926–1976)
Christophe Soulé (1951–2001)
Michel Talagrand
Jacques Tits (1930–1979)
Michèle Vergne (1943–1997)
Jean-Christophe Yoccoz (1957–1994)
Marc Yor (1949–2003)

Pour les sciences mécaniques :

Alain Bensoussan (1940–2003)
Yvonne Choquet-Bruhat (1923–1979)
Philippe Ciarlet (1938–1991)
Paul Deheuvels (1948–2000)
Yves Meyer (1939–1993)
Maurice Roseau (1925–1982)

L'Académie accueille également des membres dits « associés étrangers » et des membres correspondants. Les « associés étrangers » sont de tout premier niveau, mais ils ne participent pratiquement pas aux travaux de l'Académie. Il faut encore être de nationalité française pour être membre à part entière. Une anecdote : autrefois, comme l'assistance aux séances hebdomadaires était une obligation essentielle, il fallait donc habiter Paris, ou pas plus loin qu'un petit trajet à cheval et, par la suite, qu'un court trajet en train ou, plus tard, à proximité d'un aéroport. Cette restriction est devenue sans objet. Les membres correspondants, eux, sont français. En mathématiques, l'on y trouve :

Marcel Berger (1927–1982)
Gérard Bricogne (1949–1999)
François Bruhat (1929–1990)
Alain Comlerauer (1941–1987)
Jean-Pierre Demailly (1957–1994)
Adrien Douady (1935–1997)
Michel Duflo (1943–1986)
Pierre Gabriel (1933–1986)
Hervé Jacquet (1939–1980)
Jean-Louis Koszul (1921–1980)
Gilles Lebeau (1954–1997)
Edmond Malinvaud (1923–1994)
Michel Raynaud (1938–1994)

Et en sciences mécaniques :

Jacques Arsac (1929–1980)
Georges Duvaud (1934–1978)
Jean-Yves Girard (1947–1994)
Roland Glowinski (1937–1987)
Gérad Loss (1944–1990)
Jean-Baptiste Leblond (1957–1997)
Charles-Michel Marle (1934–1984)
Maurice Nivat (1937–1983)
Yves Pomeau (1942–1987)
Pierre-Arnaud Raviart (1939–1989)
Luc Tartar (1941–1990)

L'Académie publie, on l'a vu, un journal scientifique : les CRAS (*Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*).

La Société mathématique de France (SMF) fut fondée par Chasles en 1872 (c'est la troisième au monde à avoir été créée). La SMF n'eut longtemps guère d'activités, à la seule exception de la publication de son *Bulletin*, jusqu'à ce qu'en 1972 Jean-Pierre Kahane décide de prendre les choses en main et de poser les bases d'une organisation toujours en place aujourd'hui. Elle publie de nombreux ouvrages, de nature variée :

– La revue *Astérisque*, le *Bulletin de la SMF*, la *Revue d'histoire des mathématiques* sont des journaux mathématiques de type classique.
– Les *Documents mathématiques*, les *Mémoires de la SMF*, *Panoramas et synthèses* sont des séries monographiques spécialisées.
– L'*Officiel des mathématiques* annonce chaque mois les séminaires, les conférences et pratiquement toutes les activités mathématiques.
– La *Gazette des mathématiciens* est une revue de liaison interne entre les membres, et publie des articles non spécialisés, de culture mathématique générale, des notices nécrologiques, etc.

– En liaison avec l'American Mathematical Society, SMF publie des livres (et monographies) appelés *SMF/AMS Texts and Monographs*.

On trouvera plus de détails sur le site <http://www.smf.emath.fr>. La SMF publie plus ou moins régulièrement la liste de ses membres, mais, contrairement à l'American Mathematical Society, cette liste est loin de donner les coordonnées de tous les mathématiciens, même internationalement connus ! Le comble de cet individualisme français : il n'est pas rare, pour joindre un grand mathématicien français, de pouvoir ne le faire qu'au travers de la liste des membres de l'AMS ! Mais la Toile et ses différents moteurs de recherche permettent aujourd'hui de pallier ce manque.

Les anciens présidents de la SMF (1873–2004) :

1873 Chasles
1874 Lafon de Ladebat
1875 Bienayme
1876 De la Gournerie
1877 Mannheim
1878 Darboux
1879 Bonnet
1880 Jordan

....

1881 Laguerre
1882 Halphen
1883 Rouche
1884 Picard
1885 Appell
1886 Poincaré
1887 Fouret
1888 Laisant
1889 André
1890 Haton de la Goupillière

....

1891 Collignon
1892 Vicaire
1893 Humbert
1894 Picquet
1895 Goursat
1896 Koenies
1897 Picard
1898 Lecornu
1899 Guyon
1900 Poincaré

....

1901 D'Ocagne
1902 Raffy
1903 Painlevé
1904 Carvallo
1905 Borel
1906 Hadamard
1907 Blutel
1908 Perrin
1909 Bioche
1910 Bricard

....

1911 Lévy
1912 Andoyer
1913 Cosserat
1914 Vessiot
1915 É. Cartan
1916 Fouche
1917 Guichard
1918 Maillet
1919 Lebesgue
1920 Drach

....

1921 Boulanger
1922 Camene
1923 Appell
1924 Lévy
1925 Montel
1926 Fatou
1927 Defontviolant
1928 Thybaut
1929 ?
1930 Jouguet

....

1931 Denjoy
1932 Julia
1933 Liénard
1934 Chazy
1935 Frachet
1936 Garnier
1937 Peres
1938 Valiron
1939 Vergne
1940 ?

....

1941 ?
1942 Platrier

1943 Gambier
1944 Chapelon
1945 Darmois
1946 Favard
1947 Chatelet
1948 Janet
1949 Brard
1950 H. Cartan

1951 Lamothe
1952 Dubreil
1953 Mandelbrojt
1954 Leray
1955 Marchaud
1956 Roy
1957 Marchaud
1958 Dubreil
1959 Lichnerowicz
1960 Brelot

1961 Choquet
1962 Schwartz
1963 Lelong
1964 Dieudonné
1965 Ehresmann
1966 Revuz
1967 Reeb
1968 Thom
1969 Pisot
1970 Serre

1971 Cerf
1972–1973 Kahane
1974 Poitou
1975 Amice
1976 Godbillon
1977 Neveu
1978 Koszul
1979–1980 Berger

1981 Hervé
1982–1983 Houzel
1984 Verdier
1985 Malgrange
1986–1987 Mela
1988 Demazure
1989 Schiffmann

1990–1991 Bourguignon
1992–1993 Barlet
1994–1995 Langevin
1996–1997 Risler
1998–2000 Martin-Deschamps

2001–2003 Waldschmidt
2004–… Roy

La Société de mathématiques appliquées et industrielles (SMAI) a été fondée en 1983. Une partie des membres de la SMF considéraient alors qu'elle ne faisait pas assez de place aux mathématiques appliquées. Comme la SMF, la SMAI est abritée par l'IHP. Ses objectifs sont : développer la recherche en mathématiques appliquées, servir d'interface entre l'Université et l'entreprise, contribuer à la réflexion sur l'enseignement des mathématiques appliquées à tous les niveaux. Elle a de nombreuses activités. D'abord, l'édition scientifique : la collection « Mathématiques et applications », la collection « Mastere » à vocation universitaire, les revues *Esaim cocv, P&S, Proceedings* et *M2AN*. Elle organise aussi des congrès, des rencontres et des journées industrielles. En liaison avec le monde de l'industrie, elle organise l'école d'été du CEMRACS. Elle s'occupe également de formation continue. Elle publie enfin le bulletin *Matapli*, organe de liaison entre ses adhérents. Pour en savoir plus : <http://smai.emath.fr>.

Journaux mathématiques français

Les grandes institutions scientifiques, universités, grandes écoles, publièrent tôt des journaux spécialisés dans lesquels paraissaient les travaux de leurs chercheurs, toutes disciplines confondues. Certaines de ces publications devinrent par la suite des journaux mathématiques « classiques ». Nous n'en mentionnerons ici que les avatars finaux.

Le premier véritable journal mathématique français est fondé en 1810 par Gergonne : il s'agit des *Annales de mathématiques*, souvent dites « Annales de Gergonne ». Elles s'interrompent en 1832.

Le second journal mathématique français est fondé en 1836 par Liouville sous le titre *Journal de mathématiques pures et appliquées*. On dit toujours, pour abréger, « journal de Liouville » (y compris dans les moteurs de recherche de la Toile !).

Les *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, fondées en 1864 par Louis Pasteur, constituèrent d'abord un journal scientifique généraliste mais devinrent très vite, à partir de 1890, purement mathématiques.

Darboux fonde en 1870 un *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, qui paraît jusqu'en 1885.

En 1872, la SMF fonde le *Bulletin de la Société mathématique de France*.

En 1887, l'université de Toulouse fait de son journal scientifique un véritable organe de mathématiques pures, les *Annales mathématiques de Toulouse*. Une très bonne impulsion lui est donnée par Thomas Jan Stieljes, hollandais, astronome à Leyde, mais qui, n'ayant pu obtenir une chaire à Groningue, termine sa carrière à Toulouse. Stieljes est du reste un nom fort connu dans la théorie de l'intégration : une intégrale porte encore son nom.

En 1930, l'IHP fonde les *Annales de l'Institut Henri-Poincaré*, qui comportent trois éléments. A : Physique théorique, B : Probabilités et statistiques, et C : Analyse fonctionnelle.

En 1949, *les Annales scientifiques de l'université de Grenoble* se transforment en un journal de mathématiques pures, les *Annales de l'Institut Fourier*.

En 1962, la SMF fonde la *Gazette des mathématiciens*, organe de liaison interne mais que nous avons souvent cité, certains de ses numéros ayant été presque entièrement consacrés à des mathématiciens français, à l'occasion de leur décès.

En 1973, la SMF fonde la revue *Astérisque*, mélange de journal « classique » et de monographie.

En 1983, la SMAI fonde *Matapli*, autre organe de liaison interne.

Les *Publications mathématiques de l'IHES*, fondées en 1959, sont souvent appelées « Playboy » à cause de leur couverture bleue. Elles constituent sans conteste le meilleur journal mathématique du monde si on l'évalue de 1959 à nos jours. Presque chacun de ses volumes contient un texte devenu fondamental par la suite. Pour les profanes, peut-être même les professionnels, signalons que c'est le journal de mathématiques qui a le plus petit nombre d'abonnements. Les raisons en restent quelque peu mystérieuses à l'auteur du présent texte.

Mais il en est de même pour la remarquable publication *Inventiones mathematicae*. Est-ce leur récente date de création, est-ce la peur devant le haut niveau qui est le leur qui explique que la majorité des Colleges of General Education des États-Unis ne s'y abonnent pas ?

Les *CRAS (Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris)* ont une structure un peu différente de celle des journaux mathématiques ordinaires. Chacun des textes comporte au plus quatre pages. Leur but essentiel est en effet de publier le plus vite possible ; nous l'avons dit, les auteurs doivent souvent attendre fort longtemps avant de voir leur texte accepté dans les journaux classiques, puis finalement publié. Les *CRAS* acceptent deux genres de textes : soit des annonces de résultats très importants, sans grands détails en termes de preuves (preuves qui paraîtront plus tard dans les journaux « canoniques »), soit des résultats importants mais qui peuvent tenir, même détaillés, dans ces quatre pages. On peut soumettre les textes par courrier ordinaire (Académie des sciences, 23, quai de Conti, 75006 Paris), ou bien les adresser à <comptes.rendus@academie-sciences.fr>. Mais l'usage le plus fréquent est de soumettre le manuscrit à l'un des membres de l'Académie, à part entière ou correspondant. Il y a encore une dizaine d'années, ceux-ci pouvaient accepter directement la note proposée. Aujourd'hui, elle doit passer par un comité de lecture ; la publication demeure néanmoins, en moyenne, beaucoup plus rapide qu'ailleurs.

Bibliographie

Au sujet de la bibliographie

Pour retracer cette petite histoire des mathématiques en France, nous avons consulté un certain nombre de volumes, commentés ci-après.

Notre ouvrage de base a été Boyer (1968), qui couvre en un seul volume, remarquablement équilibré, une période allant de l'Antiquité à nos jours. Bourbaki (1969) est intéressant mais incomplet, et parfois un peu partial. Taton (1957) nous a également servi. Pour l'histoire plus récente, il faut consulter Dieudonné (1978). Même s'il semble plutôt destiné à un public de professionnels, certains de ses articles sont remarquables par l'universalité des sujets traités.

Le livre précédent (Dieudonné, 1977) est à aborder avec précaution, comme l'auteur le concède honnêtement en introduction. Il décrit l'état des mathématiques « vivantes » en se focalisant sur les exposés présentés aux séminaires Bourbaki. Ce choix est un peu réducteur si l'on pense que les exposés reflètent le goût et les spécialités des seuls membres de Bourbaki, même si ceux-ci sont, de par la nature même du groupe, des mathématiciens à large spectre d'intérêt.

Le dictionnaire des mathématiciens d'Hauchecorne et Suratteau (1996) est passionnant et empli d'anecdotes savoureuses.

Le livre de Bell (1937), bien qu'en anglais, est facile à lire et captivant. Cependant, cet ouvrage est notoirement peu fiable, son auteur s'étant laissé emporter par ses propres admirations.

Pour certains, l'une des meilleures histoires des mathématiques est celle de Struik (1948), et ce malgré son extraordinaire concision.

L'ouvrage de Dahan Dalmedico et Pfeiffer (1986) étudie la continuité de la pensée mathématique.

On pourra consulter aussi le très bref ouvrage de Baudet (2002).

Sur la théorie de l'intégration, voir Pier (1996).

Mentionnons aussi l'ouvrage édité par la revue *Pour la science* consacré à un ensemble de mathématiciens : Léonard de Pise, Pierre de Fermat, Gaspard Monge, Carl Friedrich Gauss, Sophie Germain, Jean-Baptiste Fourier, Augustin Cauchy, Évariste Galois, Katebe Katahiro, Li Shanlan, Ralmanujan, Georg Cantor (Thuillier, 1996). Des numéros spéciaux de *Pour la science* sont par ailleurs consacrés à Bourbaki (Mashaal, 2000), Pascal (Descotes, 2003), Galois (Verdier, 2003) et Poincaré (Bottazini, 2000).

Un livre passionnant est consacré à Fourier (Dhombres et Robert, 1998).

Sur Cauchy, mathématicien aux relations controversées, on pourra consulter Dahan Dalmedico, Chabert *et alii* (1992) et Stubhaug (2004), qui contient de nombreuses informations sur les mathématiciens français à l'époque du séjour d'Abel à Paris : Cauchy, Galois, Legendre et d'autres.

Pour compléter cet ensemble, on cherchera aux noms propres dans les encyclopédies : *Encyclopædia Universalis* (2002), *Encyclopaædia Britannica* (2003), mais surtout dans l'ouvrage spécialisé de bibliographie scientifique de Gillespie (1970–1980), ainsi que dans *Inventeurs et scientifiques* (1994).

Charpentier, Nikolsky et Habsieger (2000–2003) donnent enfin un certain nombre d'exposés fort pertinents sur l'école mathématique française actuelle.

Bibliographie détaillée

1991, *Biographical Dictionary of Mathematicians*, New York-Oxford-Singapour, Maxwell Macmillan International Publishing Group, 4 vol., 2696 p., ISBN 0-684-19288-8 ; 0-684-19289-6 ; 0-684-19290-X ; 0-684-19291-8

1994, *Inventeurs et scientifiques*, Paris, Larousse, 692 p., ISBN 2-03-350-100-0

2002, *Encyclopædia Universalis*, Paris, Encyclopædia Universalis, 28 vol., *circa* 32 000 p., ISBN 2-85229-550-4

2003, *The New Encyclopædia Britannica*, Encyclopædia Britannica, 32 vol., *circa* 34 000 p., ISBN 0-85229-961-3

A

Anné Colette, Bourguignon Jean-Pierre, Viterbo Claude, 2003
« Laurent Schwartz (1915–2002) », supplément à la *Gazette des mathématiciens*, nº 98, octobre 2003, Société des mathématiques de France, Paris, 212 p., ISBN 2-85629-140-6, ISSN 0224-8999

Anné Colette, Chaperon Marc, Chanciner Alain, 2004
« René Thom (1923–2002) », supplément à la *Gazette des mathématiciens*, nº 103, Société des mathématiques de France, Paris, ISBN 2-85629-163-5

Asancheyev Boris, 2002
Épures de géométrie descriptive, Paris, Hermann, 231 p., ISBN 2-705664475

B

Baudet Jean, 2002
Nouvel Abrégé d'histoire des mathématiques, Paris, Vuibert, 336 p., ISBN 2-711753166

Belhoste Bruno, 1998
« De l'École polytechnique à Saratoff. Les premiers travaux géométriques de Poncelet », *Bulletin de la Société des Amis de la Bibliothèque de l'École polytechnique*, nº 19, juin 1998, Paris, p. 9–30, 99 p., ISSN 0989-3059

Bell Eric, 1937
Men of Mathematics, New York, Simon and Schuster, ISBN 0-671-46400-0 (reédition 1999, Minneapolis, Sagebrush Education Resources, ISBN 0-833-50022-8)

Berger Marcel, 1990
« Noirs dessins », *Pour la science*, nº 152, juin 1990, Paris, p. 112–115, ISSN 0143-4092

Berger Marcel, 1998
« Rencontres avec un géomètre », *Gazette des mathématiciens*, nº 76, p. 24–45, avril 1998, nº 77, p. 29–54, juillet 1998, Société mathématique de France, Paris, ISSN 0224-8999

Berger Marcel, 2002
« Rencontres avec un géomètre : Mikhael Gromov », dans *Où en sont les mathématiques ?* (dir. Jean-Michel Kantor), Paris, Vuibert-Société mathématique de France, p. 399–439, 440 p., ISBN 2-7117-8994-2

Berger Marcel, 2003
« À la recherche des harmoniques », *Pour la science*, hors-série nº 41, octobre 2003, Paris, p. 44–46, ISSN 0153-4092

Berger Marcel, 2006
Géométrie vivante : l'échelle de Jacob de la géométrie, Paris, Cassini, ISBN 2-84225-035-4

Bochnak Jacek, Coste Michel, Roy Marie-Françoise, 1987
Géométrie algébrique réelle, Berlin, Springer Verlag, 373 p., ISBN 3-540-16951-2

Booss-Bavnbek Bernhelm, Hoyrup Jens, 2003
Mathematics and War, Bâle, Birkhaüser Verlag, 416 p., ISBN 3-7643-1634-9

Bottazini Umberto, 2000
« Poincaré, philosophe et mathématicien », *Pour la science*, coll. « Les génies de la science », nº 4, août-novembre 2000, Paris, 96 p., ISSN 1298-6079

Bourbaki Nicolas, 1969
Éléments d'histoire des mathématiques, Paris, Hermann, 323 p. (reédition 1997, Paris, Masson, ISBN 2-2258-0320-X)

Boyer Carl, 1968
A History of Mathematics, New York, John Wiley, 736 p. (reédition 1991, New York, John Wiley, 736 p., ISBN 0-471-54397-7)

Brenier Yann, 1991
« Polar Factorizations and Monotone Rearrangement of Vector-Valued Functions », *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 44, John Wiley, New York, p. 375–417, ISSN 0010-3640

Brenier Yann *et alii*, 2003

« Reconstruction of the Early Universe as a Convex Optimization Problem », *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 346, nº 2, décembre 2003, Blackwell Publishing Group, p. 501–524, ISSN 0035-8711

Brezinsky Claude, 2004

« Les fractions continues ou l'art de l'approximation », *Pour la science*, nº 316, février 2004, Paris, p. 64–71, ISSN 0153-4092

Burke Hubbard Barbara, 1995

Ondes et ondelettes, la saga d'un outil mathématique, Paris, Pour la science-Belin, coll. « Sciences d'avenir », Paris, 235 p., ISBN 2-902918-90-9

C

Cannone Marco, Friedlander Susan, 2003

« Navier : Blow-up and collapse », *Notices of the American Mathematical Society*, vol. 50, nº 1, janvier 2003, Providence, American Mathematical Society, p. 7–13, ISSN 0002-9920

Cartan Élie, 1928

Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann, Paris, Gauthier-Villars, coll. « Cahiers scientifiques », 273 p. (2e édition 1946, Paris, Gauthier-Villars, coll. « Cahiers scientifiques », 378 p. ; reédition 1988, Paris, Éditions Jacques Gabay, 388 p., ISBN 2-87647-008-x)

Cartan Henri, 1977

Cours de calcul différentiel, Paris, Hermann, coll. « Méthodes », 364 p., ISBN 2-7056-5879-3

Cartan Henri, Eilenberg Samuel, 1956

Homological Algebra, Princeton, Princeton University Press, 390 p. (reédition 1999, Princeton, Princeton University Press, 408 p., ISBN 0-691-04991-2)

Cartier Pierre, 2000

« Grothendieck et les motifs », *Notes sur l'histoire et la philosophie des mathématiques* (Pierre Cartier, Alain Herreman), IV, Bures-sur-Yvette, Institut des hautes études scientifiques, ISSN 0073-8301

Chaleyat-Maurel Mireille, Brette Jean *et alii*, 2001

« Mathématiques dans la vie quotidienne », supplément à *Plot*, nº 94, Paris, ISSN 0397-7471

Changeux Jean-Pierre, Connes Alain, 1989

Matière à pensée, Paris, Odile Jacob, 267 p., ISBN 2-7381-0073-2 (réédition 2000, Paris, Odile Jacob, 267 p., ISBN 2-7381-0815-6)

Charpentier Éric, Nikolski Nikolaï, Habsieger Laurent (dir.), 2000–2003
Leçons de mathématiques d'aujourd'hui, Paris, Cassini, coll. « Le sel et le fer », 2 vol., 352 et 388 p., ISBN 2-84225-070-2 ; 2-84225-058-3

Chatzis Konstantinos, 1998
« Jean-Victor Poncelet (1788–1867) ou le Newton de la mécanique appliquée », *Bulletin de la Société des Amis de la Bibliothèque de l'École polytechnique*, nº 19, juin 1998, Paris, p. 69–97, ISSN 0989-3059

Chenciner Alain, Simó Carles, 1996
Journée annuelle - Mécanique céleste : cent ans après la publication des « Méthodes nouvelles » de Henri Poincaré, Paris, Société mathématique de France, 32 et 23 p.

Choquet Gustave, 2001
« Borel, Baire, Lebesgue », rencontre « La mesure de Lebesgue a cent ans », 27 avril 2001, École normale supérieure-Unité de mathématiques pures et appliquées, Lyon (disponible en ligne sur <http://www.umpa.ens-lyon.fr/~jfcoulom/Lebesgue/Choquet.pdf>)

Colmez Pierre, Serre Jean-Pierre (éd.), 2001
Correspondance Grothendieck-Serre, Paris, Société mathématique de France, coll. « Documents mathématiques », nº 2, 288 p., ISBN 2-85629-104-X, ISSN 1629-4939

Connes Alain, 1990
Géométrie non commutative, Paris, InterÉditions, 240 p., ISBN 2-7296-0284-4

Connes Alain, 1994
Noncommutative Geometry, San Diego, Academic Press, 662 p., ISBN 0-12-185860-X

Connes Alain, Lichnerowicz André, Schützenberger Marcel Paul, 2000
Triangle de pensées, Paris, Odile Jacob, 214 p., ISBN 2-7381-0762-1

Courant Richard, Hilbert David, 1924
Methoden der Mathematischen Physik, Berlin, Springer Verlag (1re édition en langue anglaise 1937, Methods of Mathematical Physics, New York, John Wiley, 2 vol. ; réédition 1989, New York, John Wiley, 2 vol., 576 p. et 856 p., ISBN 0-471504394)

D

Dahan Dalmedico Amy, Pfeiffer Jeanne, 1986
Une histoire des mathématiques. Routes et dédales, Paris, Le Seuil, coll. « Points », 314 p., ISBN 2-02-009138-0

Dahan Dalmedico Amy, Chabert Jean-Louis *et alii*, 1992
Chaos et déterminisme, Paris, Le Seuil, 414 p., ISBN 2-02-018182-0

Damour Thibault, Carrière Jean-Claude, 2002

Entretiens sur la multitude du monde, Paris, Odile Jacob, 300 p., ISBN 2-7381-1077-0

Debever Robert, 1979

Élie Cartan et Albert Einstein : lettres sur le parallélisme absolu, Bruxelles, Palais des Académies, 233 p., ISBN 2-8031-0096-7

Descotes Dominique, 2003

« Pascal, le calcul et la théologie », *Pour la science*, coll. « Les génies de la science », nº 16, août-novembre 2003, Paris, 96 p., ISSN 1298-6079

Dhombres Jean, Robert Jean-Bernard, 1998

Fourier, créateur de la physique mathématique, Paris, Belin, 767 p., ISBN 2-7011-1213-3

Dieudonné Jean, 1974

Cours de géométrie algébrique, Paris, Presses universitaires de France, 2 vol., 234 et 222 p., ISBN 2-1303-2991-8

Dieudonné Jean, 1977

Panorama des mathématiques pures : le choix bourbachique, Paris, Gauthiers-Villars, 306 p., ISBN 2-04-010012-1 (reédition 2003, Paris, Éditions Jacques Gabay, 306 p., ISBN 2-8764-7210-4)

Dieudonné Jean, 1978

Abrégé d'histoire des mathématiques : 1700–1900, Paris, Hermann, 2 vol. (réédition 1996, Paris, Hermann, 517 p., ISBN 2-7056-6024-0)

Digne François (dir.), 1999

« André Weil », *Gazette des mathématiciens*, numéro spécial, supplément au nº 80, avril 1999, Société mathématique de France, Paris, ISSN 0224-8999

E

Ebin David, 1972

Espace des métriques riemanniennes et mouvement des fluides via les variétés d'applications, Paris, École polytechnique, 196 p.

Eliashberg Yakov, Mishachev Nikolaï, 2001

Introduction to the h-Principle, Providence, American Mathematical Society, 206 p., ISBN 0-8218-3227-1

F

Félix Lucienne, 1974

Le Message d'un mathématicien, Henri Lebesgue, Paris, Albert Blanchard, 260 p.

Finkielkraut Alain, 1988
La Sagesse de l'amour, Gallimard, coll. « Folio Essais », 200 p., ISBN 2-0703-2469-9

Flament Dominique, 2003
Histoire des nombres complexes, entre algèbre et géométrie, Paris, CNRS Éditions, coll. « Histoire des sciences », 504 p., ISBN 2-271-06128-8

Fomenko Anatolij, 1994
Visual Geometry and Topology, Berlin, Springer Verlag, 324 p., ISBN 3-54053-361-3

Fulton William, 1998
Intersection Theory (Second Edition), Berlin, Springer Verlag, 470 p., ISBN 3-540-12176-5

G

Gennes Pierre Gilles (de) *et alii*, 1989
L'Ordre du chaos, Paris, Pour la science-Belin, 207 p., ISBN 2-9029-1878-X

Ghys Étienne, La Harpe Pierre (de) (dir.), 1990
Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov, Bâle, Birkhäuser Verlag, coll. « Progress in Mathematics », nº 83, 285 p., ISBN 3-7643-3508-4

Ghys Étienne, 2004
« Groupes aléatoires, d'après Misha Gromov », *Séminaire Bourbaki 2002–2003*, nº 55, Société mathématique de France, Paris, exposé 916, ISSN 0303-1179

Gillespie Charles Couston (dir.), 1970–1981
Dictionary of Scientific Biography, New York, Scribner, 9 vol., ISBN 0-684-80588-X

Grassmann Hermann, 1994
A New Branch of Mathematics : The Ausdehnungslehre of 1844 and Other Works, Chicago, Open Court Publishing Company, 555 p., ISBN 0812692764

Gray Jeremy, 2002
« Adrien-Marie Legendre (1752–1833) », *European Mathematical Society Newsletter*, septembre 2002, nº 45, Southampton, European Mathematical Society, ISSN 1027-488X

Grothendieck Alexander, 1986
Récoltes et semailles. Réflexions et témoignage sur un passé de mathématicien, Université des sciences et techniques du Languedoc/CNRS, Montpellier, 1986 (disponible en ligne sur le site : <http://mapagenoos.fr/recoltesetsemailles>)

H

Hadamard Jacques, 1898–1901
Leçons de géométrie élémentaire, Paris, Armand Colin, 2 vol. (reédition 1988, Paris, Éditions Jacques Gabay, 2 vol., 334 et 742 p., ISBN 2-87647-038-1)

Hadamard Jacques, 1903
Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique, Paris, Hermann, 375 p.

Hadamard Jacques, 1910
Leçons sur le calcul des variations, Paris, Hermann, 520 p.

Hadamard Jacques, 1959
Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique, Paris, Albert Blanchard, 135 p. (reédition 1993, Paris, Éditions Jacques Gabay, 150 p., ISBN 2-87647-017-9)

Hauchecorne Bertrand, Suratteau Daniel, 1996
Des mathématiciens de A à Z, Paris, Ellipses, 381 p., ISBN 2-7298-4683-2

Herremann Alain, 2000
Découvrir et transmettre. La dimension collective des mathématiques dans « Récoltes et Semailles » d'Alexandre Grothendieck, Bures-sur-Yvette, Institut des hautes études scientifiques, coll. « Publications mathématiques de l'IHES », ISSN 0073-8301

Houzel Christian, 2004
« Le rôle de Bourbaki dans les mathématiques du vingtième siècle », *Gazette des mathématiciens*, nº 100, p. 53–64, avril 2004, Société mathématique de France, Paris, ISSN 0224-8999

Hurewicz Witold, Wallman Henry, 1948
Dimension Theory, Princeton University Press, 165 p.

J

Jackson Allyn, 2004
« Comme appelé du néant - As if Summoned from the Void: The Life of Alexandre Grothendieck », *Notices of the American Mathematical Society*, vol. 51, nºs 9 et 10, octobre et novembre 2004, Providence, American Mathematical Society, p. 1038–1056 et 1196–1216, ISSN 0002-9920

K

Kahane Jean-Pierre, 2003
« Analyse du livre sur Fourier par Dhombres et Robert », *The Mathematical Intelligencer*, nº 25, New York, Springer, p. 77–80, ISSN 0343-6993

Kantor Jean-Michel (dir.), 2000
« Jean Leray », *Gazette des mathématiciens*, numéro spécial, supplément au nº 84, avril 2000, Société mathématique de France, Paris, ISSN 0224-8999

Klein Felix, 1979
Development of Mathematics in the 19th century, Brookline, Math Science Press, 630 p., ISBN 0-915-692287

L

Lafforgue Laurent, 2005
« Le français au service des sciences », *Pour la science*, nº 329, mars 2005, p. 8

Lakatos Imre (dir.), 1976
Proofs and Refutations. The Logic of Mathematical Discovery, Cambridge, Cambridge University Press, 174 p., ISBN : 0-521-290384 (édition française 1984, *Preuves et Réfutations*, Paris, Hermann, coll. « Actualités scientifiques et industrielles », 220 p., ISBN 2-7056-1412-5)

Laskar Jacques, 1989
« A Numerical Experiment on the Chaotic Behavior of the Solar System », *Nature*, vol. 338, nº 6212, 16 mars 1989, New York, p. 237–238

Lebesgue Henri, 2004
« Les lendemains de l'intégrale – Lettres à Émile Borel », Paris, Vuibert, ISBN 2-7117-5309-3

Leray Jean, 1967
« L'invention en mathématiques », *Logique et connaissance scientifique* (dir. Jean Piaget), Paris, Gallimard, coll. « Encyclopédie de la Pléiade », p. 465–473, 1345 p.

Lesigne Emmanuel, 2001
Pile ou face : une introduction aux théorèmes limites du calcul des probabilités, Paris, Ellipses, 117 p., ISBN 2-7298-0679-2

Lévy Paul, 1970
Quelques aspects de la pensée d'un mathématicien, Paris, Albert Blanchard, 222 p.

Lichnerowicz André, 1967
« Remarques sur les mathématiques et la réalité », *Logique et connaissance scientifique* (dir. Jean Piaget), Paris, Gallimard, coll. « Encyclopédie de la Pléiade », p. 475–485, 1345 p.

Lions Jacques-Louis, 2003
Œuvres choisies, Paris, EDP Sciences, 3 vol., 740 p., 874 p. et 828 p., ISBN 2-86883-661-5 ; 2-86883-662-3 ; 2-86883-663-1

M

Mandelbrot Benoît, 1977
Fractals: Form, Chance and Dimension, New York, Freeman, 365 p., ISBN 0716704730 (édition française 1989, *Les Objets fractals : formes, hasard et dimension*, Paris, Flammarion, 268 p., ISBN 2-08-211188-1)

Marmi Stefano, 2000
« Chaotic Behavior in the Solar System » *in* « Séminaire Bourbaki - Volume 1998/99, exposés 850–864 », *Astérisque*, nº 266, Société mathématique de France, Paris, p. 113–136, 483 p., ISBN 2-85629-090-6, ISSN 0303-1179

Martin-Deschamps Mireille, Le Tallec Patrick, Waldschmidt Michel *et alii*, 2002
L'Explosion des mathématiques, Paris, Société mathématique de France-Société de mathématiques appliquées et industrielles, 103 p., ISBN 2-85629-120-1

Mashaal Maurice, 2000
« Bourbaki, une société secrète de mathématiciens », *Pour la science*, coll. « Les génies de la science », nº 2, février–mai 2000, Paris, 98 p., ISSN 1298-6079

Maz'ya Vladimir, Shaposhnikova Tatjana, 1998
Jacques Hadamard, a Universal Mathematician, Providence-Londres, American Mathematical Society-London Mathematical Society, coll. « History of Mathematics », vol. 14, 574 p., ISBN 0-8218-08419

Meier-Rust Kathrin, 1999
« Das Genie, das aus Leningrad kam », *Zürcher Zeitung*, Zurich

Meyer Yves, 2005
« Compression des images fixes », *Gazette de la Société mathématique de France*, vol. 103, p. 9–23, ISBN 2-85629-163-5

Mumford David, 1999
The Red Book of Varieties and Schemes, Berlin, Springer Verlag, coll. « Lecture Notes in Mathematics », vol. 1358, 304 p., ISBN 3-540-63293-X

P

Pansu Pierre, 2003
« Groupes aléatoires », *Journée annuelle de la SMF-2003*, Paris, Société mathématique de France, p. 37–48

Pekonen Osmo, 1992
« L'affaire Weil à Helsinki en 1939 », *Gazette des mathématiciens*, nº 52, avril 1992, Société mathématique de France, Paris, p. 13–20, ISSN 0224-8999

Pharamond dit D'costa Layla, 2002
Géométrie réelle des dessins d'enfants, Paris, Institut de mathématiques-Paris VI

Pier Jean-Paul, 1996
Histoire de l'intégration, vingt siècles de mathématique, Paris, Masson, 306 p., ISBN 2-225-85324-X

Poincaré Henri, 1902
La Science et l'Hypothèse, Paris, Flammarion, coll. « Bibliothèque de philosophie scientifique » (réédition 1968, Paris, Flammarion, coll. « Champs », 252 p., ISBN 2-0808-1056-1)

Poincaré Henri, 1905
La Valeur de la science, Paris, Flammarion, coll. « Bibliothèque de philosophie scientifique » (réédition 1990, Paris, Flammarion, coll. « Champs », 185 p., ISBN 2-0808-1230-0)

Poncelet Jean-Victor, 1865–1866
Traité des propriétés projectives et des figures, Paris, Gauthier-Villars, 2 vol. (réédition 1995, Paris, Éditions Jacques Gabay, 2 vol., 464 et 464 p., ISBN 2-87647-132-9)

R

Reinhard Marcel, 1950–1952
Le Grand Carnot, Paris, Hachette, coll. « Figures du passé », 2 vol., 354 et 392 p. (réédition 1994, Paris, Hachette, 709 p., ISBN 2-0123-5066-6)

Riehm Carl, 2002
« The Early History of the Fields Medal », *Notices of the American Mathematical Society*, vol. 49, nº 7, août 2002, Providence, American Mathematical Society, p. 778–780, ISSN 0002-9920

Ripka Georges, 2002
Vivre savant sous le communisme, Paris, Belin, coll. « Débats », 301 p., ISBN 2-7011-3053-0

Ruelle David, 1991
Hasard et chaos, Paris, Odile Jacob, 247 p., ISBN 2-7381-0133-X

S

Sakarovitch Joël, 1997
Épures d'architecture. De la coupe des pierres à la géométrie descriptive, Bâle, Birkhaüser Verlag, coll. « Science Networks. Historical Studies », ISBN 3-7643-5701-0

Schmidt Marian, 1990
Hommes de science, Paris, Hermann, 250 p., ISBN 2-7056-6124-7

Schwartz Laurent, 1987
« De certains processus mentaux dans la découverte en mathématiques », *Revue des sciences morales et politiques*, p. 325–340

Schwartz Laurent, 1997
Un mathématicien aux prises avec le siècle, Paris, Odile Jacob, 528 p., ISBN 2-7381-0462-2

Serre Jean-Pierre, 2003
Œuvres-Collected Papers, Berlin, Springer Verlag, 4 vol., 596 p., 742 p., 731 p. et 694 p., ISBN 3-540-43562-X ; 3-540-43563-8 ; 3-540-43564-6 ; 3-540-43565-4

Spring David, 1997
Convex Integration Theory (Solutions to the H-Principle in Geometry and Topology), Bâle, Birkhaüser Verlag, coll. « Monographs in Mathematics », vol. 92, 212 p., ISBN 3-7643-5805-X

Struik Dirk, 1948
A Concise History of Mathematics, New York, Dover Publications (réédition 1987, New York, Dover Publications, 288 p., ISBN 0-486-60255-9)

Stubhaug Arild, 2004
Niels Henrik Abel et son époque, Berlin, Springer Verlag, 463 p., ISBN 2-287-59746-8

T

Taton René, 1951
L'Œuvre scientifique de Monge, Paris, Presses universitaires de France, coll. « Bibliothèque de philosophie contemporaine », 441 p.

Taton René, 1957
« Les mathématiques », *Histoire de la science* (dir. Maurice Daumas), Paris, Gallimard, coll. « Encyclopédie de la Pléiade », p. 535–710, 1907 p.

Thuillier Pierre (dir.), 1996
Les Mathématiciens, Paris, Pour la science, coll. « Bibliothèque pour la science », 208 p., ISBN 2-9029-1899-2

V

Van Der Waerden Bartel Leenert, 1930–1931
Modern Algebra, Berlin, Springer Verlag, 2 vol. (réédition 1991, Algebra, Berlin, Springer Verlag, 2 vol., 265 et 284 p., ISBN 0-387-40624-7 ; 0-387-40625-5)

Verdier Norbert, 2003
« Galois, le mathématicien maudit », *Pour la science*, coll. « Les génies de la science », nº 14, février-mai 2003, Paris, 96 p., ISSN 1298-6079

Von Neumann John, 1961
« The Mathematician », *John von Neumann. Collected Works* (éd. Abraham Haskel Taub), vol. 1, New York, Pergamon Press, p. 1–9

W

Weil André, 1940
L'Intégration dans les groupes topologiques, Paris, Hermann, coll. « Actualités scientifiques et industrielles », nº 869, 158 p. (réédition 1993, Paris, Hermann, coll. « Actualités scientifiques et industrielles », 164 p., ISBN 2-7056-1145-2)

Weil André, 1946

Foundations of Algebraic Geometry, Providence, American Mathematical Society, coll. « Colloquium Publications », nº 29, 299 p. (réédition 1978, Providence, American Mathematical Society, 363 p., ISBN 0-821-81029-4)

Weil André, 1948

Variétés abéliennes et courbes algébriques, Paris, Hermann, 165 p. (réédition 1971, Paris, Hermann, 256 p., ISBN 2-7056-5714-2)

Weil André, 1979–1980

Œuvres scientifiques-Collected Papers, New York, Springer, 3 vol., 574 p., 561 p. et 465 p., ISBN 0-387-903305

Weil André, 1991

Souvenirs d'apprentissage, Bâle, Birkhaüser Verlag, coll. « Vita mathematica », vol. 6, 201 p., ISBN 3-7643-2500-3

Weil André, 1996

« S.-s. Chern as a Geometer and a Friend », *A Mathematician and his Mathematical Work : Selected Papers of s.-s. Chern* (éd. Shiu-Yuen Cheng, Gang Tian, Peter Li), Singapour, World Scientific Publishing, coll. « World Scientific Series in 20th Century Mathematics », 724 p., ISBN 981-02-2385-4

Weil Simone, 1999

Œuvres, Paris, Gallimard, coll. « Quarto », 1288 p., ISBN 2-0707-5434-0

Index

adpf association pour la diffusion de la pensée française ●
6, rue Ferrus 75014 Paris.
ecrire@adpf.asso.fr

Réalisation : adpf et Jean-Gabriel Delacroy
Recherches iconographiques : adpf
Design : ÉricandMarie, Paris
Impression : Cent Pages, Grenoble
mai 2005, 12 500 exemplaires

Titres disponibles