ABSTRACTS OF THE 7TH INTERNATIONAL CONGRESS OF LOGIC, METHODOLOGY AND PHILOSOPHY OF SCIENCE SALZBURG, JULY 11TH - 16TH, 1983

VOLUME 1: ABSTRACTS OF SECTIONS 1, 2, 3, 4, AND 7

L. Bertossi

Compiled by

JOHANNES CZERMAK

Department of Mathematics
University of Salzburg

and

CHRISTINE PÜHRINGER

Institute for Philosophy of Science
International Research Center of Salzburg

Printed by

J. HUTTEGGER OHG
Salzburg 1983

Section 7: Foundations of Probability and Induction
Leopoldo E. Bertossi, Facultad de Matemâticas, Pontificia Universidad Católica de Chile, Casilla 114 - D Santiago, Chile

FAKTISCHE WAHRSCHEINLICHKEIT UND BROWNSCHE BEWEGUNG

Hier bezieht sich faktische Wahrscheinlichkeit auf eine von R. Chuaqui [2] gegebene Definition der Wahrscheinlichkeit. Diese Definition, die ursprünglich als semantisch betrachtet wurde [1], kann man als faktisch kennzeichnen in dem Sinne, daß das Wahrscheinlichkeitsmaß aus einer objektiven Modellierung der physikalischen Zufallssituation entsteht. Im Grunde genommen soll dieses Maß invariant sein unter einer gewissen Gruppe von Transformationen des gemeinsamen Trägers aller mengentheoretischen Strukturen, die die verschiedenen physikalisch möglichen Ergebnisse darstellen. Diese Strukturen bilden eine sogenannte „einfache Wahrscheinlichkeitsstruktur".

Zur Definition der Wahrscheinlichkeit für Zufallssituationen, wo zusammengesetzte Ergebnisse auftreten, wurde die ursprüngliche Definition in [3] erweitert. Dabei spielen die sogenannten „zusammengesetzten Wahrscheinlichkeitsstrukturen" die wesentliche Rolle. Diese Strukturen beruhen auf gewissen „kausalen Strukturen", die die kausalen bzw. stochastischen Beziehungen darstellen sollen.

In dieser Arbeit wollen wir die Brownsche Bewegung - als zusammengesetztes Zufallsphänomen - im Rahmen der faktischen Definition der Wahrscheinlichkeit behandeln.

Zunächst soll bemerkt werden, daß eine Darstellung des Gausschen Wahrscheinlichkeitsgesetz $N(\mu, \sigma^2)$ mittels einer einfachen Wahrscheinlichkeitsstruktur moglich ist, nämlich durch $\underline{K} = \{<\mathbb{R}, (I)_{I\in \mathcal{I}}, R, \{r\}> : r \in \mathbb{R}\}$, wobei $\mathcal{I}$ die Menge der Intervalle auf der reellen Gerade ist und R eine geeignete dreistellige Relation ist (kurz $\underline{K} = \{<\mathbb{R}, \{r\}> : r \in \mathbb{R}\}$), so daß für ν, das von $\underline{K}$ bestimmte Maß,

$$\nu\{<\mathbb{R}, \{r\}> \in \underline{K} : r \leq x\} = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \text{ gilt.}$$

Wir machen im folgenden von den zusammengesetzten Wahrscheinlichkeitsstrukturen Gebrauch : Sei $\mathbb{T}$ das Intervall $[0,1]$, $\mathbb{F} = \{S \cup \{0\} : S \subseteq \mathbb{T}$ und $1 \leq \overline{\overline{S - \{0\}}} < \aleph_0\}$ und $\leq$ die übliche Ordnungsbeziehung auf $[0,1]$. Die zusammengesetzte kausale Struktur ist $\overline{\mathbb{T}} = <\mathbb{T}, \mathbb{F}, \leq>$; und für $X \in \mathbb{F}$ ist $<X, \leq>$ ein endlicher „kausaler Baum". Um die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeitsstruktur zu definieren, bleibt noch, die Menge der zusammengesetzten Ergebnisse anzugeben. Zu diesem Zweck ordnen wir jedem t in $[0,1]$ eine Familie von einfachen Warhrscheinlichkeitsstrukturen zu.

Die einfache Wahrscheinlichkeitsstruktur $\underline{K}_0 = \{<\{0\}, \{0\}>\}$ wird $t_0 := 0$ zugeordnet. Dabei haben wir Wahrscheinlichkeitsdichte $p_{t_0,0} = 1$.

Definition: Eine Abbildung f ist ein (zusammengesetztes) Ergebnis, d.h. $f \in \mathbb{H}$, gdw.

a) Es gibt ein $X \in \mathbb{F}$, so daß Dom $f = X$ und $f(0) \in \underline{K}_0$

b) Falls Dom $f = X$, etwa $X = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ mit $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$, dann gibt es für jedes $k = 1, \ldots, n-1$ ein $r \in \mathbb{R}$, so daß $f(t_{k+1}) \in \underline{K}^r_{k+1}$, wobei $\underline{K}^r_{k+1}$ die einfache Wahrscheinlichkeitsstruktur $\underline{K}^r_{k+1} := \{<\mathbb{R}, \{s\}>: s \in \mathbb{R}\}$ ist und die von ihr bestimmte Wahrscheinlichkeit $P_{t_{k+1},r}$

die Dichte $p_{t_{k+1},r}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi(t_{k+1}-t_k)}} \exp(-\frac{1}{2} \dfrac{(x-r)^2}{t_{k+1}-t_k})$ besitzt.

Wir ordnen t_1 die Struktur $\underline{K}^0_1 = \{<\mathbb{R}, \{s\}> : s \in \mathbb{R}\}$ zu mit dem Maß, dessen Dichte $p_{t_1,0}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi t_1}} \exp(-\frac{1}{2} \dfrac{x^2}{t_1})$ ist, und

fordern, daß $f(t_1) \in \underline{K}^0_1$.

c) Aus $f(t_k) = <\mathbb{R}, \{s\}>$ folgt $f(t_{k+1}) \in \underline{K}^s_{k+1}$, $k = 0, \ldots, n-1$.

Die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeitsstruktur ist $\underline{\mathbb{H}} = <\mathbb{F}, \mathbb{H}>$. $\underline{\mathbb{H}}$ bestimmt ein Maß μ auf $\mathbb{H}$ (vgl. [3]).

Ist $<X, \leq>$ einer der endlichen kausalen Bäume, etwa $X = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ mit $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$, dann definieren wir $F_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch

$F_X(x_1, \ldots, x_n) := \mu\{f \in \mathbb{H}_X : f(t_1) \leq x_1, \ldots, f(t_n) \leq x_n\}$

$(\mathbb{H}_X := \{f \in \mathbb{H} : \text{Dom } f = X\})$

Mit der obigen Definition kann man das folgende beweisen:

$$F_X(x_1, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} p_{t_1,0}(u_1)\, p_{t_2,u_1}(u_2) \cdots\cdots$$

$$\cdots\, p_{t_n,u_{n-1}}(u_n)\, du_1 \ldots du_n .$$

Dann ist F_X eine endlich dimensionale Wahrscheinlichkeitsverteilung und außerdem ist sie diejenige, die der eindimensionalen Brownschen Bewegung während des Zeitintervalls $[0,1]$ entspricht. Mit dieser Familie von Wahrscheinlichkeitsverteilungen - die unmittelbar von μ bestimmt sind - bilden wir mittels des Satzes von Kolmogoroff die kanonische Brownsche Bewegung auf $(\mathbb{R}^{[0,1]}, \mathcal{C})$, wobei $\mathcal{C}$ die von den Zylindermengen erzeugte σ-Algebra ist.

<u>Literatur</u>:

[1] R. Chuaqui, "A semantical definition of probability", <u>Non-Classical Logics, Model Theory and Computability</u>. Arruda, da Costa, Chuaqui (eds.) North-Holland, 1977, pp. 135-167.

[2] R. Chuaqui, "Factual and cognitive probability", erscheint demnächst bei Proceedings of the V Simposio Latinoamericano de Lógica Matemática, Bogota 1981.

[3] R. Chuaqui, "Foundations of statistical methods using a semantical definition of probability". <u>Mathematical Logic in Latin America</u>. Arruda, Chuaqui, da Costa (eds.) North-Holland, 1980, pp. 103-120.