

## Un Ejemplo de Razón de Convergencia en el Método de los Elementos Finitos

Leopoldo Bertossi

### Resumen

*Usando el método general de Aubin-Nitsche [1],[4], se obtiene la mejor razón de convergencia en espacios de splines generales de la aproximación mediante el método de elementos finitos para un problema hiperbólico de 1er. orden.*

AMS Classifications: 65M60, 41A15.

### 1.- Introducción

Consideremos el siguiente problema hiperbólico de 1er. orden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} &= 0, \quad x \in \mathbb{R} \quad 0 < t \leq T \\ u(x, 0) &= u_0(x) \\ u(x, t) &\text{periódica en } x \text{ con período } 1 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Si  $u_0$  es suave, entonces también  $u$  es suave, ya que  $u(x, t) = u_0(x - t)$ . Para mayor simplicidad consideramos  $u_0$  analítica

Aproximamos la solución de la ecuación empleando el método de los elementos finitos.

Sea  $\tilde{L}^2$  el conjunto de funciones en  $L^2_{loc}(\mathbb{R})$  periódicas con período 1 con norma  $\|u\| = \|u\|_{L^2(0,1)}$  y  $\tilde{H}^1$  el conjunto de funciones en  $H^1_{loc}(\mathbb{R})$  que son periódicas con período 1 con la norma  $\|u\|_1 = \|u\|_{H^1(0,1)}$ . Aquí  $L^2_{loc}(\mathbb{R}) = \{f : f \in L^2(\Omega), \forall \Omega \subseteq \mathbb{R}\}$ ;  $H^1_{loc}(\mathbb{R})$  definido en forma análoga.

Se aproxima la solución de (1.1) mediante el método de Ritz-Galerkin tomando una aproximación  $U(x, t)$  en un subespacio  $M$  de  $\tilde{H}^1$ . Dupont [3] estudia la razón de convergencia en  $\tilde{L}^2$  en tres subespacios  $M$  distintos: el de las funciones lineales a trozos, el de las funciones cúbicas de Hermite y el de las splines cúbicas. En forma sorprendente, se encuentra que la razón de convergencia en  $\tilde{L}^2$  de la aproximación de Ritz-Galerkin en el espacio

$M_{HC}$  de la cúbicas de Hermite no es óptima en el sentido que esta razón de convergencia y la de la  $\tilde{L}^2$ -aproximación de  $u$  en  $M_{HC}$ , difieren. Sin embargo, la razón de convergencia en  $\tilde{L}^2$  es óptima cuando la aproximación de Ritz yace en  $M_{PL}$  o en  $M_{SH}$ , los espacios de las funciones lineales a trozos y splines cúbicas, resp. En general, se tiene razón de convergencia óptima en problemas elípticos y parabólicos. La explicación de esta singularidad parece ser todavía un problema abierto.

En este trabajo se encuentra, usando un argumento general de Aubin [1] y Nitsche [4], una razón de convergencia para todos los espacios de elementos finitos. Esta razón de convergencia puede ser encontrada también ocupando algunos resultados generales que aparecen en Swartz y Wendroff [6].

## 2.- La Aproximación de Ritz-Galerkin

Introduzcamos cierta notación standard:

$$P := \{x_j : x_j = j \cdot h, j \in Z\}$$

con

$$h := \frac{1}{J}, \quad J \in \mathbb{N}$$

$$S_p^{k,p} := \{v : v \in C^{k-1} \mathbb{R}, \quad v|_{[x_{j-1}, x_j]} \text{ es polinomio de grado } p-1\}$$

(el espacio de las funciones spline de orden  $k-1$  y grado  $p-1$ )

$$M_{k,p} := \{v : v \in \tilde{H}^1, v \in S_p^{k,p}\}, k \geq 1, p \geq 3$$

Todas las propiedades en las definiciones anteriores hacen referencia a la variable espacial  $x$ .

Claramente  $S_p^{k,p} \subseteq H_{loc}^1(\mathbb{R})$ .

En general, si  $M$  es un subespacio de  $\tilde{H}^1$  de dimensión  $k$ , la aproximación de Ritz  $U(x, t) \in M$  a la solución  $u$  de (1.1) está dada por:

$$\begin{aligned} U(x, t) &= \sum_{i=1}^k a_i(t) v_i(x) \\ < \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x}, v > = 0, \quad \forall v \in M, \quad \forall 0 < t \leq T \\ U(x, 0) &= U_0(x) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Aquí  $\{v_i\}_{i=1}^k$  es una base de  $M$ .

$< f, g > := \int_0^1 f g dx$  y  $U_0$  es una buena aproximación de  $u_0$  que después podremos elegir en forma apropiada. En particular, nos interesa  $M = M_{k,p}$ .

Es claro, de (2.1), que  $U$  se encuentra resolviendo un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en los  $a_i(t)$ .

### 3.- Un Problema Auxiliar

En la próxima sección consideraremos la  $\tilde{H}^1$ -proyección sobre  $M_{k,p}$  de la solución  $u$ ; con este fin, y siguiendo el argumento general de Aubin-Nitsche [1],[4], recurrimos al operador dual o adjunto del correspondiente a la  $\tilde{H}^1$ -proyección. Planteamos entonces lo que usualmente se llama "el problema adjunto" que en nuestra situación es:

Sea  $f$  la función de período 1 solución de:

$$\begin{aligned} -\frac{d^2}{dx^2}f(x) + f(x) &= g(x), & 0 \leq x \leq 1 \\ f(0) - f(1) &= 0, f'(0) - f'(1) = 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

donde  $g \in \tilde{C}[0,1]$  (i.e;  $g$  continua de período 1).

No es difícil establecer la validez de la siguiente acotación:

$$\|f\|_2 \leq C\|g\| \quad (3.2)$$

donde  $\|f\|_2 := \|f\|_{H^1[0,1]} = \{\|f\|^2 + \|f_x\|^2 + \|f_{xx}\|^2\}^{\frac{1}{2}}$  y  $C$  es una constante independiente de  $f$  y  $g$ .

### 4.- La $\tilde{H}^1$ -Proyección de la Solución sobre $M_{k,p}$ y Aproximación

Nitsche [4] y Aubin [1] demuestran que la optimalidad (se usa también la noción de cuasi-optimalidad) de la aproximación en la norma  $H^1$  es condición suficiente para la optimalidad en norma  $L^2$  bajo ciertas condiciones en el operador.

En nuestra situación demostramos, entonces, primero la optimalidad de la convergencia en la norma de  $\tilde{H}^1$  de la  $\tilde{H}^1$ -proyección sobre  $M_{k,p}$  de la solución  $u$ , para luego ilustrar la convergencia óptima en la norma de  $\tilde{L}^2$  de esta proyección a través del uso del problema adjunto.

Consideramos entonces  $\rho = u - W$ , donde  $u$  es la solución de (1) y  $W$  es la  $\tilde{H}^1$ -proyección de  $u$  sobre  $M_{k,p}$  i.e.  $W$  está definida por

$$\left\langle \frac{\partial \rho}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} \right\rangle + \langle \rho, v \rangle = 0 \quad \forall v \in M_{k,p}, \forall 0 \leq t \leq T \quad (4.1)$$

Se tiene

$$\|\rho\|_1 \leq Ch^{\ell-1} \|u\|_{\ell} \quad (4.2)$$

( $\ell \leq p$ ; con  $C$  independiente de  $h$ ). En efecto,

$$\begin{aligned}
\|\rho\|_1^2 &= \|\rho_x\|^2 + \|\rho\|^2 \\
&= \langle \rho_x, \rho_x \rangle + \langle \rho, \rho \rangle \\
&= \langle \frac{\partial \rho}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}(u - W) \rangle + \langle \rho, u - W \rangle \\
&= \langle \frac{\partial \rho}{\partial x}, u_x \rangle + \langle \rho, u \rangle \quad (\text{por (4.1)}) \\
&= \langle \frac{\partial \rho}{\partial x}, u_x - v_x \rangle + \langle \rho, u - v \rangle \quad \text{con } v \in M_{k,p} \quad (\text{por (4.1)}) \\
&\leq \|\rho_x\| \|u_x - v_x\| + \|\rho\| \|u - v\| \\
&\leq \|\rho\|_1 \|u - v\|_1 + \|\rho\|_1 \|u - v\|
\end{aligned}$$

luego,

$$\|\rho\| - 1 \leq \|u - v\|_1 + \|u - v\|$$

Elegimos ahora  $v \in M_{k,p}$  tal que  $\|u - v\|_\alpha \leq Ch^{\ell-\alpha} \|u\|_\ell$ ,  $\alpha = 0, 1; \ell \leq p$ , donde  $C$  no depende de  $h$ . Esto es posible por propiedades aproximativas de los splines (Ver por ejemplo, M.Schultz [5]).

Tenemos así :

$$\|\rho\|_1 \leq Ch^{\ell-1} \|u\|_\ell$$

y esto prueba (4.2).

Recurrimos ahora a la dualidad, Aubin-Nitsche [1],[4], considerando la solución  $f$  del problema (3.1) con  $g = \rho$ .

Se tiene

$$\begin{aligned}
\|\rho\|^2 &= \langle \rho, \rho \rangle = \langle \rho, -f_{xx} + f \rangle \\
&= \langle \rho_x, f_x \rangle + \langle \rho, f \rangle \\
&= \langle \rho_x, f_x - v_x \rangle + \langle \rho, f - v \rangle \quad (\text{por (4.1)}) \\
&\leq \|\rho\|_1 \|f - v\|_1 + \|\rho\| \|f - v\| \\
&\leq \|\rho\|_1 \|f - v\|_1 + \|\rho\|_1 \|f - v\| \\
&= \{\|f - v\|_1 + \|f - v\|\} \|\rho\|_1 \\
&\leq C\{\|f - v\|_1 + \|f - v\|\} h^{\ell-1} \|u\|_\ell \quad (\text{por (4.2)})
\end{aligned}$$

Elegimos ahora  $v$  de modo que

$$\|f - v\|_1 + \|f - v\| \leq Ch \|f\|_2 \quad (p \geq 2)$$

(Ver, por ejemplo, M. Schultz [5]).

Entonces:

$$\begin{aligned}
\|\rho\|^2 &\leq C \|f\|_2 h^\ell \|u\|_\ell \\
\|\rho\|^2 &\leq C \|\rho\| h^\ell \|u\|_\ell \quad (\text{por (3.2)})
\end{aligned}$$

Así tenemos:

$$\|\rho\| \leq Ch' \|u\|_t, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4.3)$$

De (4.3) se desprende que la  $\tilde{H}^1$ -proyección sobre  $M_{k,p}$  tiene razón de convergencia óptima. En forma análoga se puede demostrar que:

$$\|\rho_t\| \leq Ch' \|u_t\|_t \quad (4.4)$$

### 5.- Razón de Convergencia de la Aproximación de Ritz-Galerkin

Nos interesa ahora la estimación del error

$$\begin{aligned} \epsilon &= u - U \\ &= (u - W) + (W - U) \\ &= \rho + (W - U) \end{aligned}$$

$W$  es la proyección definida en 4.

Sea  $\theta = W - U$

$$\langle W_t, v \rangle = \langle W_t, v \rangle + \langle U_t - u_t, v \rangle + \langle U_x - u_x, v \rangle \quad \text{por (1.1) y (2.1)}$$

$$\langle W_t - U_t, v \rangle = \langle W_t - u_t, v \rangle + \langle U_x - u_x, v \rangle$$

$$= \langle W_t - u_t, v \rangle + \langle U_x - W_x, v \rangle + \langle W_x - u_x, v \rangle, \quad v \in M_{k,p}$$

Tomando  $v = W - U \in M_{k,p}$ , resulta:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|W - U\|^2 = \langle W_t - u_t, W - U \rangle + \langle W_x - u_x, W - U \rangle$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|W - U\|^2 = \langle \rho_t, W - U \rangle + \langle \rho_x, W - U \rangle$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\theta\|^2 \leq \|\rho_t\|^2 + \|\rho_x\|^2 + \|\theta\|^2$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\theta\|^2 \leq \|\rho_t\|^2 + \|\rho\|_1^2 + 2\|\theta\|^2$$

Con las desigualdades (4.3) y (4.4) se tiene,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\theta\|^2 \leq Ch^{2\ell-2} (\|u\|_\ell^2 + \|u_t\|_\ell^2) + 2\|\theta\|^2 \quad (5.1)$$

Por otra parte,

$$\|\theta(0)\| \leq \|(W - u)(0)\| + \|(u - U)(0)\|$$

Si escogemos  $U_0$  de modo que:

$$\|u_0 - U_0\| \leq Ch^\ell$$

( $U_0$  puede ser, por ejemplo, la interpolación o la proyección en  $L^2$  sobre  $M$  de  $u_0$ ). Se tiene:

$$\|\theta(0)\|^2 \leq C(1 + \|u_0\|_\ell^2)h^{2\ell}$$

Integrando en (5.1):

$$\begin{aligned} \|\theta\|^2 &\leq C(1 + \|u_0\|_\ell^2)h^{2\ell} + Ch^{2\ell-2} \left( \int_0^t \|u\|_\ell^2 + \int_0^t \|u_t\|_\ell^2 \right) + 4 \int_0^t \|\theta\| \\ &\leq Ch^{2\ell-2} \{1 + \|u_0\|_\ell^2 + \|u\|_{L^2[0,T,H^\ell]}^2 + \|u_t\|_{[0,T,H^\ell]}^2\} + 4 \int_0^t \|\theta\|^2 \end{aligned}$$

Aplicando el Lema de Gronwall (ver, por ejemplo, R. Bellman [2]):

$$\|\theta\|^2(t) \leq Ch^{2\ell-2} \{\%\} \exp(8t)$$

$$\|\theta\|^2(t)_{L^\infty[0,T,L^2]} \leq Ch^{2\ell-2} \{\%\} \quad (5.2)$$

Consideremos ahora una estimación del error

$$\epsilon = u - U :$$

$$\begin{aligned} \|\epsilon\|_{L^\infty[0,T,L^2]}^2 &\leq 2\|\rho\|_{L^\infty[0,T,L^2]}^2 + 2\|\theta\|_{L^\infty[0,T,L^2]}^2 \\ &\leq Ch^{2\ell-2} (\|u\|_{L^\infty[0,T,H^\ell]}^2 + 1 + \|u_0\|_\ell^2 + \\ &\quad \|u\|_{L^2[0,T,H^\ell]}^2 + \|u_t\|_{L^2[0,T,H^\ell]}^2) \end{aligned}$$

Finalmente tenemos la estimación:

$$\|\epsilon\|_{L^\infty[0,T,L^2]} \leq Ch^\ell - 1$$

donde  $C$  no depende de  $h$ . Vemos que siempre se obtiene la razón de convergencia  $h^{\ell-1}$  para la norma de  $L^2$  que no es la óptima  $h^\ell$ . Como se muestra en Dupont [3], es posible, a veces alcanzar esta última razón de convergencia.

### Referencias

- [1] Aubin, J.P., Behaviour of the Errors of the Approximate Solutions of Boundary Value Problems for Elliptic Operators by Galerkin's and Finite Difference Methods, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* **21**(1967), 599-637.
- [2] Bellman, R., Stability Theory of Differential Equations. Mc. Graw-Hill, 1953.
- [3] Dupont, T., Galerkin Methods for First Order Hyperbolics: an Example, *SIAM J. Num. Anal.* **10**(5)(1973), 890-899.
- [4] Nitsche, J., Ein Kriterium für die Quasi-Optimalität des Verfahrens, *Num. Math.* **11**(1968), 346-348.
- [5] Schultz, M., Spline Analysis Prentice Hall, 1973.
- [6] Swartz, B., Wendroff, B., Generalized Finite-Difference Schemes, *Math. of Comp.* **23**(1969), 37-49.

Leopoldo Bertossi  
Universidad Católica de Chile  
Facultad de Matemática,  
Depto. de Matemática,  
Casilla 114-D,  
Santiago,  
Chile.

Fecha de recepción: Noviembre de 1982.

Bertossi

Revista de  
**Matemáticas  
Aplicadas**

ex Sigma

Volumen 9, Número 1, Julio 1987.

- 
1. A Differential Equations Approach to Function Minimization.  
J. Amaya.
  8. Una Generalización del Método de Bisección al Caso de Funciones con Varias Raíces.  
P. Basso, G. Gatica.
  22. Distribution of Zeros and Oscillatory Properties of Solutions of a Fourth Order Differential Equation.  
A. Benharbit.
  27. Un Ejemplo de Razón de Convergencia en el Método de los Elementos Finitos.  
L. Bertossi.
  34. Lg-Spline and Axisymmetric thin Shells.  
Y. Correc, A. J. Y. Le Méhauté.
  55. Decomposition of Complete Graphs into Caterpillars.  
H. Hevia, S. Ruiz.
  63. Unique Equilibrium Points in Two Person Games.  
E. Marchi, L. G. Quintas.
  75. On the Existence of Infinitely Many Radial Solutions for Some Elliptic Problems.  
S. Solimini.
  87. Convergence Rates For Constrained Spline Functions.  
F. I. Utreras.

ISSN 0716-3096  
Departamento de Matemáticas Aplicadas  
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas  
Universidad de Chile